АВТОМОБИЛЕ- И ТРАКТОРОСТРОЕНИЕ. ВЫП. 5
МИНСК 1974

А. Ф. Андреев

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОЛЕСА С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Основные факторы, определяющие проходимость колесной машины по деформируемым грунтам, — сцепление и сопротивление качению, которые в свою очередь зависят от площади контакта шины с почвой и глубины колеи. Поэтому для решения вопроса эффективного использования колесных машин на деформируемых поверхностях необходимо иметь теорию взаимодействия колеса с грунтом.

Прежде чем перейти к выводу теоретических зависимостей, необходимо коротко остановиться на механических свойствах шины и грунта. Вначале полагали, что деформация грунта прямо пропорциональна нагрузке. Это допущение, высказанное в 1813 г. чешским ученым Герстнером [1], до сих пор часто применяется как основа для расчетов взаимодействия колеса с почвой.

Первые работы по измерению сопротивления грунтов нагрузкам были вызваны появлением тракторной тяги.

В 1913 г. Р. Бернштейн пришел к выводу, что сопротивление грунта вдавливанию штампа пропорционально корню квадратному из глубины погружения и зависит от формы и площади штампа:

$$q = (a'u + a''F)\sqrt{h} = C\sqrt{h},$$

где F — площадь отпечатка; u — периметр отпечатка; a', a'' — константы, характеризующие грунт.

В 1929 г. М. Н. Летошнев предложил более общую зависимость:

$$q = (a'u + a''F)\,h^{\mu} = Ch^{\mu},$$

где μ — степень деформируемости грунта.

Рассматривая качение колеса по почве, Летошнев применительно к площадке в 1 $см^2$ на ободе колеса выразил коэффициент C в виде

$$C = (2a' + a''b)\,\delta S,$$

где b — ширина обода колеса, *см*; δS — длина площадки, которая при ширине b дает: $F = b \cdot \delta S = 1$ *см*.

Если вынести b за скобки, то можно записать это выражение в том виде, в каком его получил в 1960 г. М. Г. Беккер:

$$C = \frac{k_c}{b} + k_\varphi ,$$

где $k_c = 2\,a'$ — коэффициент, характеризующий связность почвы; $k_\varphi = a''$ — коэффициент, характеризующий внутреннее трение в почве.

М. Н. Летошнев пришел к выводу, что результаты его экспериментов по определению силы тяги конных повозок лучше всего соответствуют расчетным данным при $\mu = 0{,}5$.

В действительности, как установлено исследованиями А. К. Бирули [2], показатель степени μ может принимать различные значения для одного и того же грунта в зависимости от его влажности. При малых влажностях в связных грунтах, когда деформация подчиняется линейному закону, $\mu = 1$; при влажности, близкой к пределу текучести, $\mu = 0$; при влажностях, близких к капиллярному насыщению водой, $\mu = 0{,}5$. Имея в виду, что при повышенных влажностях сельскохозяйственные и землеройные работы не производятся, многие исследователи принимают линейную зависимость: $q = \sigma_г h$, где $\sigma_г$ — коэффициент объемного смятия, *кГ/см*^{3}.

Из других зависимостей, применяемых в земледельческой механике, известны формулы С. С. Корчунова, М. Т. Троицкой и В. В. Кацыгина [2]. Более общей из них является формула Кацыгина

$$q = P_0 \,\mathrm{th} \frac{\sigma_г}{P_0} h, \tag{1}$$

где $\sigma_г$ — коэффициент объемного смятия грунта, *кГ/см*^{3}; P_0 — предельная несущая способность, *кГ/см*^{2}.

Значения $\sigma_г$ и P_0 для дерново-подзолистых почв нечерноземной зоны приведены в работе [3]. Эти результаты получены в ЦНИИМЭСХ при вдавливании в почву штампа плотномера. С увеличением площади штампа величины $\sigma_г$ и P_0 уменьшаются.

Обрабатывая опытные данные, В. В. Гуськов [3] установил корреляционную зависимость между коэффициентом объемного смятия и размерами колеса:

$$\sigma_г = \frac{\sigma_г'}{\sqrt{bD}},$$

где $\sigma'_г$ — коэффициент объемного смятия почвы, полученный при вдавливании штампа плотномера; D — диаметр колеса, *см.*

При существующих глубинах колеи аргумент гиперболического тангенса $x = \frac{\sigma_г}{P_0} h$ мал.

Поэтому можно приближенно считать $\operatorname{th} x \approx x$. Тогда формула (1) преобразуется

$$q = \sigma_г h. \tag{2}$$

Если аргумент гиперболического тангенса не более 0,3, то ошибка при таком допущении менее 3%.

При изучении взаимодействия колеса с грунтом необходимо всегда учитывать деформацию пневматической шины и особенно при твердопластичном и твердом состоянии грунта. Исходя из опытных данных, полагают, что закон распределения удельных давлений по площадке контакта шины с дорогой подчиняется степенной зависимости [2]:

$$q = \sigma_ш u^\lambda , \tag{3}$$

где $\sigma_ш$ — объемный коэффициент жесткости; u — вертикальная деформация элементов шины; λ — степень деформируемости.

Числовые значения $\sigma_ш$ и λ определяются обычно на основании измерений удельных давлений в контакте колеса с опорной поверхностью, что требует сложных экспериментов. Упрощение методов определения механических свойств шины облегчит решение задачи о взаимодействии шины и грунта. Ниже предлагается определять механические свойства шины по ее нагрузочной характеристике.

Рассмотрим случай взаимодействия колеса с пневматической шиной и твердой поверхностью.

Допустим, что несдеформированная поверхность шины имеет форму цилиндра с длиной образующей, равной ширине шины.

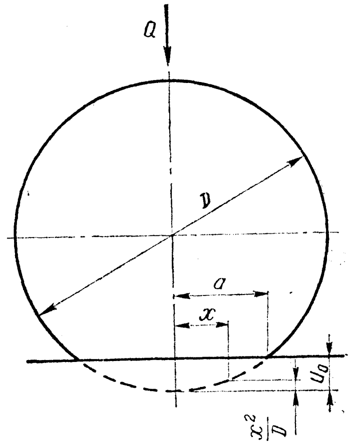

Рис. 1. Схема деформации пневматической шины на жестком основании.

Из рис. 1 следует:

$$u = \frac{1}{D} (a^2 - x^2), \tag{4}$$

где D — диаметр шины; a — половина длины контакта.

Подставляя значение u из формулы (4) в уравнение (3), получим закон распределения удельных давлений по длине контактной площадки:

$$q = \frac{\sigma_{ш}}{D^{\lambda}} (a^2 - x^2)^{\lambda} = \sigma_{ш} \left(\frac{a^2}{D} \right)^{\lambda} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\lambda}.$$

Результирующая нормальная реакция опоры на колесо равна:

$$Q = \sigma_{ш} b \left(\frac{a^2}{D} \right)^{\lambda} \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\lambda} dx,$$

где Q — нагрузка на колесо; b — ширина колеса.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\lambda} = 1 - \lambda \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \ldots$$

Ряд сходится при значениях $\left(\frac{x}{a} \right)^2 \leqslant 1$.

Ограничимся первыми двумя членами разложения в ряд подынтегральной функции.

Тогда

$$Q = \sigma_{ш} b \left(\frac{a^2}{D} \right)^{\lambda} \int_{-a}^{a} \left(1 - \lambda \frac{x^2}{a^2} \right) dx =$$

$$= 2\sigma_{ш} b \frac{a^{2\lambda+1}}{D^{\lambda}} \left(1 - \frac{1}{3} \lambda \right).$$

Подставляя в это уравнение значение $a = \sqrt{Du_0}$, найдем:

$$Q = 2\sigma_{ш} b \sqrt{D} \left(1 - \frac{1}{3} \lambda \right) u_0^{\lambda + \frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Таким образом, нагрузочная характеристика шины может быть построена по формуле (5), если известны постоянные $\sigma_{ш}$ и λ. Указанные коэффициенты находятся следующим способом. Логарифмируя равенство (5) и полагая затем

$$A = \lg \left[2\sigma_{ш} b \sqrt{D} \left(1 - \frac{1}{3} \lambda \right) \right], \quad B = \lambda + \frac{1}{2},$$

$X = \lg u_0$ и $Y = \lg Q$, приходим к уравнению

$$Y = A + BX. \tag{6}$$

Итак, необходимо, чтобы полученные результаты измерений располагались на логарифмической сетке вблизи прямой.

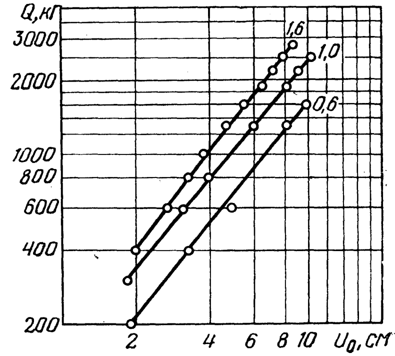

Рис. 2. Нагрузочная характеристика шины 12-38 в логарифмических координатах (при различных p кГ/см²).

На рис. 2 изображены нагрузочные характеристики шины 12-38 при различных давлениях p воздуха в шине, построенные в логарифмических координатах по результатам опытных исследований [4]. Функциональная сетка ($\lg u_0$, $\lg Q$) на рис. 2 позволяет убедиться, что точки, полученные из наблюдений, располагаются достаточно близко к прямой линии. Подбор коэффициентов в уравнении (6) осуществляется по способу наименьших квадратов или способу средней.

Зная коэффициенты A и B, найдем λ, а затем и $\sigma_ш$ из уравнений:

$$B = \lambda + \frac{1}{2};$$

$$A = \lg\left[2\sigma_ш b\sqrt{D}\left(1 - \frac{1}{3}\lambda\right)\right].$$

В частном случае можно принять линейную зависимость для деформации шины ($\lambda = 1$):

$$q = \sigma_ш u. \tag{7}$$

Такое допущение близко к действительности для шин с высоким давлением воздуха и жестким протектором.

Подставляя значение u из формулы (4) в уравнение (7), получим параболический закон распределения удельных давлений по длине контактной площадки:

$$q = \frac{\sigma_ш}{D}(a^2 - x^2).$$

Непосредственно из формулы (5) при $\lambda = 1$ получим:

$$Q = \frac{4}{3}\sigma_ш b\sqrt{D}\, u_0^{\frac{3}{2}}$$

или

$$u_0 = kQ^{0,67},$$

что соответствует исследованиям П. Ариано [2].

Нахождение коэффициента $\sigma_ш$ в этом случае упрощается:

$$\sigma_ш = \frac{3Q}{4b\sqrt{Du_0^3}}.$$

В. Л. Бидерман [5] рассматривает полный прогиб шины как сумму прогибов протектора и каркаса:

$$u_0 = u_п + u_к = C_1 \frac{Q}{u_0} + C_2 \frac{Q}{p + p_0}, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 — эмпирические коэффициенты; p — давление воздуха в шине; p_0 — величина, характеризующая жесткость каркаса при нулевом внутреннем давлении.

Справедливость предложенной им формулы подтверждена многочисленными опытными данными.

Из характеристики шины (8) по Бидерману следует, что в случае, когда деформацией протектора можно пренебречь ($C_1 = 0$), между нагрузкой и деформацией шины существует линейная зависимость:

$$Q = \frac{p + p_0}{C_2} u_0. \tag{9}$$

Легко заметить, что в этом случае степень деформируемости шины должна быть $\lambda = 1/2$.

Действительно, из общего уравнения (5) при $\lambda = 1/2$ следует:

$$Q = \frac{5}{3} \sigma_ш b \sqrt{Du_0}. \tag{10}$$

Решая совместно уравнения (9) и (10) относительно $\sigma_ш$, находим

$$\sigma_ш = \frac{3}{5} \cdot \frac{p + p_0}{C_2 b \sqrt{D}}. \tag{11}$$

Величину $\frac{C_2}{p + p_0}$ легко найти по нагрузочной характеристике шины. Записав выражение (8) в виде

$$\frac{u_0^2}{Q} = C_1 + \frac{C_2}{p + p_0} u_0,$$

получим в координатах $u_0, \frac{u_0^2}{Q}$ прямую, тангенс угла наклона которой к оси u_0 будет равен $\frac{C_2}{p + p_0}$.

Из анализа нагрузочных характеристик шины 12-38 при различных давлениях воздуха в шине имеем $C_2=0{,}56$ *см*$^{-1}$; $P=0{,}4$ *кГ/см*^{2}.

Обзор различных схем взаимодействия пневматического колеса с почвой приведен в работе В. Ф. Бабкова, А. К. Бирули и В. М. Сиденко [1].

Процесс качения колеса с пневматической шиной по почве лучше отражает схема, в которой, кроме деформации почвы, учитывается форма деформированной оболочки. Но принятие шины за эластичную оболочку, взаимодействующую с деформируемой поверхностью, встречает трудности при аналитической разработке вопроса. Общее решение для обычного колеса получено А. К. Бирулей [2] на основе упрощающего предположения о цилиндрической форме контакта пневматического колеса с почвой. Это нестрогое в общем случае решение позволяет, однако, производить вычисления с меньшей затратой труда и времени.

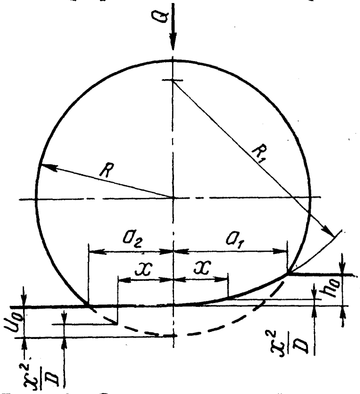

Рис. 3. Схема взаимодействия пневматической шины с почвой при качении колеса.

При решении задачи о взаимодействии колеса с деформируемым грунтом была использована расчетная схема, изображенная на рис. 3.

Полагаем, что на участке загрузки контакт пневматического колеса с почвой происходит по цилиндрической поверхности, центр окружности которой лежит на вертикали, проходящей через центр колеса. Тогда:

$$a_1=\sqrt{D(h_0+u_0)}=\sqrt{D_1h_0};$$

$$D_1=D\,\frac{h_0+u_0}{h_0}.$$

Не принимаем во внимание обратимую деформацию почвы. Тогда на участке разгрузки контакт колеса с почвой происходит по плоской поверхности длиной

$$a_2=\sqrt{Du_0}.$$

Зависимость между нагрузкой на колесо и нормальными контактными напряжениями определяется уравнением:

$$Q=b\left[\int_0^{a_1} q\,dx+\int_{-a_2}^{0} q\,dx\right]. \qquad (12)$$

Аналитическое выражение $q=f(x)$ для первого интеграла можно записать в виде:

$$q=\sigma_{\text{г}} h^{\mu}=\sigma_{\text{г}}\left(\frac{a_1^2}{D_1}\right)^{\mu}\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}\right)^{\mu}, \tag{13}$$

для второго интеграла

$$q=\sigma_{\text{ш}} u^{\lambda}=\sigma_{\text{ш}}\left(\frac{a_2^2}{D}\right)^{\lambda}\left(1-\frac{x^2}{a_2^2}\right)^{\lambda}. \tag{14}$$

После подстановки в уравнение (12) значений q, определяемых для зоны загрузки формулой (13), а для зоны разгрузки формулой (14), получаем:

$$Q=b\left[\sigma_{\text{г}}\left(\frac{a_1^2}{D}\right)^{\mu}\int_0^{a_1}\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}\right)^{\mu}dx+\right.$$

$$\left.+\sigma_{\text{ш}}\left(\frac{a_2^2}{D}\right)^{\lambda}\int_{-a_2}^{0}\left(1-\frac{x^2}{a_2^2}\right)^{\lambda}dx\right].$$

В общем случае первообразные подынтегральных функций не выражаются через элементарные функции. Используем методы приближенного вычисления интегралов с помощью степенных рядов, ограничиваясь двумя членами разложения в ряд подынтегральной функции. Принимая во внимание, что

$$a_1=\sqrt{D(h_0+u_0)};$$

$$a_2=\sqrt{Du_0};$$

$$D_1=D\frac{h_0+u_0}{h_0},$$

получим

$$Q=b\sqrt{D}\left[\sigma_{\text{г}} h_0^{\mu}\left(1-\frac{1}{3}\mu\right)\sqrt{h_0+u_0}+\right.$$

$$\left.+\sigma_{\text{ш}} u_0^{\lambda}\left(1-\frac{1}{3}\lambda\right)\sqrt{u_0}\right]. \tag{15}$$

Для нижней точки контакта участка загрузки справедливо равенство

$$\sigma_{\text{г}} h_0^{\mu}=\sigma_{\text{ш}} u_0^{\lambda};$$

отсюда:

$$u_0 = \left(\frac{\sigma_г}{\sigma_ш}\right)^{\frac{1}{\lambda}} h_0^{\frac{\mu}{\lambda}};$$

$$h_0 = \left(\frac{\sigma_ш}{\sigma_г}\right)^{\frac{1}{\mu}} u_0^{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Эти выражения могут быть подставлены в формулу (15) для исключения h_0 и u_0.

Рассмотрим частный случай качения колеса по почве нормальной влажности, для которой сопротивление вдавливанию пропорционально глубине колеи $q = \sigma_г h$.

Считаем, что на мягкой почве влияние почвозацепов на деформацию шины незначительно и им можно пренебречь. Тогда закон деформации шины будет:

$$q = \sigma_ш \sqrt{u}.$$

Из уравнения (15) при $\mu = 1$ и $\lambda = 0{,}5$ следует:

$$Q = \sigma_г b \sqrt{D} \left[\frac{2}{3} h_0 \sqrt{h_0 + u_0} + \frac{5}{6} \sigma_ш u_0\right].$$

Исключая из этого выражения u_0 подстановкой в него соотношения

$$u_0 = \left(\frac{\sigma_г}{\sigma_ш}\right)^2 h_0^2,$$

получим формулу для вычисления глубины колеи:

$$Q = \sigma_г b \sqrt{D} \left[\frac{2}{3} h_0 \sqrt{h_0 + \left(\frac{\sigma_г}{\sigma_ш}\right)^2 h_0^2} + \frac{5}{6} \frac{\sigma_г}{\sigma_ш} h_0^2\right].$$

Для проверки предположения о незначительном влиянии почвозацепов на деформацию шины на мягкой почве сравним расчетную деформацию шины 12-38 с результатами стендовых испытаний ее, проведенных в НАТИ [4] на мягкой почве, соответствующей почве, подготовленной под посев.

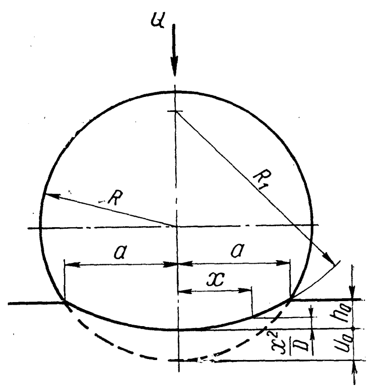

Рис. 4. Схема взаимодействия пневматической шины с почвой при вдавливании в почву неподвижного колеса.

При том же упрощающем предположении о цилиндрической форме контакта шины с почвой (рис. 4) из условия, что вертикальная реакция почвы уравновешивается давлением колеса, получим для $\mu=1$:

$$Q=\frac{4}{3}\,b\sqrt{D}\,\sigma_{г}h_0\sqrt{h_0+u_0}.$$

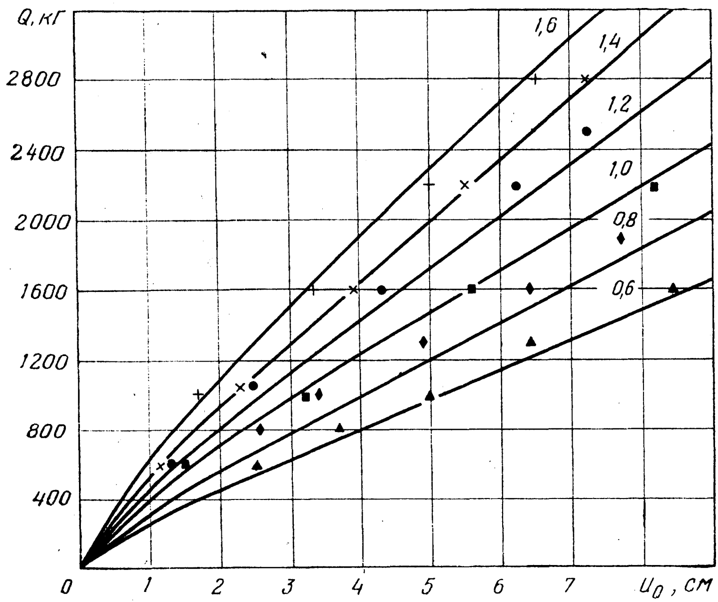

Рис. 5. Зависимость между нагрузкой и деформацией шины 12-38 на мягкой почве (при различных *p*, *кГ/см²*.

Заменив в этом выражении h_0 его значением из равенства

$$h_0=\frac{\sigma_{ш}}{\sigma_{г}}\sqrt{u_0},$$

получим уравнение для вычисления деформации шины при вдавливании ее в почву:

$$Q=\frac{4}{3}\,b\sqrt{D}\,\sigma_{ш}\sqrt{\frac{\sigma_{ш}}{\sigma_{г}}u_0^{1,5}+u_0^2}.$$

На рис. 5 представлены расчетные зависимости для шины 12-38 при различных давлениях воздуха в шине. Точками на график нанесены результаты измерений. В расчетах принят коэффициент объемного смятия почвы $\sigma_г = 0{,}14$ *кГ/см*³. Значения коэффициентов $\sigma_ш$ вычислены по формуле (11).

Как видно из рис. 5, результаты расчетов достаточно близко соответствуют результатам опыта.

Литература

[1] *Бабков В. Ф.* и др. Проходимость колесных машин по грунту. М., 1959. [2] *Бируля А. К.* Эксплуатация автомобильных дорог. М., 1956. [3] *Гуськов В. В.* Оптимальные параметры сельскохозяйственных тракторов. М., 1966. [4] Исследование сцепных свойств колесных тракторов. Труды НАТИ. М., 1960, вып. 119. [5] *Бидерман В. Л.* и др. Автомобильные шины. М., 1963.