УДК 624.042.12:534.1

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИБРИДНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

к.т.н. [1]**Мищенко А.В.,** д.ф.-м.н. [2]**Немировский Ю.В.**

[1]*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, РФ*
[2]*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Современные технологические приемы (склейка, диффузионная и взрывная сварка, плазменное и холодное газодинамическое напыление) позволяют создавать уникальные конструкции из практически любых наборов материалов [1, 2]. Вследствие взаимодействия в конструкции широкого спектра материалов, исследование ее деформированного, напряженного состояния и рационального подбора материалов требует разработки специальных методов расчета. В условиях статических режимов нагружения соответствующие подходы достаточно подробно освещены в [3], некоторые вопросы динамики были рассмотрены в [4, 5]. Здесь разработан общий подход, позволяющий с единых позиций исследовать гибридные стержневые системы с широким разнообразием материалов и динамических режимов. Выполнен учет взаимодействия между элементами конструкции и опорными средами.

1. Соотношения расчетной модели. Рассмотрим неоднородный (гибридный) стержень – элемент плоской стержневой системы, испытывающий прямой продольно-поперечный динамический изгиб в плоскости симметрии yx локальной системы координат xyz. Стержень имеет поперечно-слоистую структуру, образованную границами $y_k(x)$ ($k=1,...,s+1$) с произвольной привязкой к отсчетной плоскости $y=0$. Геометрическая ось стержня x образуется пересечением силовой $z=0$ и отсчетной плоскостей. Слои, имеющие поперечные размеры (ширину и толщину)

$$b_k(x,y),\quad h_k(x),\quad (k=1,...,s),$$

выполнены из различных квазиоднородных материалов при обеспечении идеального межслойного контакта. Материал k -го слоя характеризуется: объемной плотностью ρ_k, модулем упругости E_k и коэффициентом вязкости η_k.

Будем считать, что в отношении физических и геометрических параметров гибридного стержня выполняются ограничения: а) об одинаковости порядков числовых значений одноименных физических характеристик используемых материалов; б) об относительной тонкости стержня – малости поперечных размеров при условии $l \geq (5 \div 6)h$. Это позволяет принять следующий вариант кинематических соотношений для функций продольных u и поперечных v перемещений, углов поворота θ, деформаций ε_x, ε_y и сдвигов γ_{yx}:

$$\begin{gathered}
u(x,y,t)=u_0(x,t)-\theta(x,t)y,\quad v(x,y,t)=v_0(x,t),\\
\varepsilon_x(x,y,t)=\varepsilon_0(x,t)-\kappa(x,t)\cdot y,\quad \varepsilon_y(x,y,t)=0,\quad \gamma_{yx}(x,y,t)=-\gamma_0(x,t),\\
\varepsilon_0(x,t)=u_0'(x,t),\quad \kappa(x,t)=\theta'(x,t),\quad \theta(x,t)=v'(x,t)+\gamma_0(x,t),
\end{gathered} \tag{1}$$

где u_0, v_0 – смещения точек продольной оси; ε_0, κ – деформация и кривизна (с поправкой на γ') оси; штрихом обозначено дифференцирование по координате x.

К стержню приложены динамические нагрузки $q_x(x,t)$, $q_y(x,t)$, $m_z(x,t)$, инерционные силовые факторы

$$q_{x,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k \iint_{A_k} (\ddot{u}_0 - \ddot{\theta} y) dA, \quad q_{y,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k \iint_{A_k} \ddot{v}_0 dA,$$
$$m_{z,dyn}(x,t) = -\sum_{k=1}^{s} \rho_k \iint_{A_k} (\ddot{u}_0 - \ddot{\theta} y) y dA \tag{2}$$

и реакции вязко-упругого основания

$$q_x^{(r)}(x,t) = -\beta_x b_r(x) u(x, y_r, t) - c_x b_r(x) \dot{u}(x, y_r, t),$$
$$q_y^{(r)}(x,t) = -\beta_y b_r(x) v(x,t) - c_y b_r(x) \dot{v}(x,t), \qquad m_{zi}^{(r)}(x,t) = q_x^{(r)} y_r, \tag{3}$$

где $\dot{(\ )} = \partial(\ )/\partial t$, A_k – площадь поперечного сечения k-го слоя, β_x, β_y – коэффициенты жесткости, а c_x, c_y – вязкости основания при смещении в направлении осей x и y; $b_r(x)$, $y_r(x)$ – ширина и координата поверхности контакта стержня с основанием.

Интегральные уравнения движения для гибкого слоистого стержня, записанные с учетом реактивных нагрузок (3), факторов (2) и гипотез (1) для усилий

$$\left[N, Q, M\right](x) = \sum_{k=1}^{s} \iint_{A_k} \left[\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y\right] dA \tag{4}$$

принимают вид

$$\begin{cases} N' + (Q\theta)' - \beta_{xx} u_0 + \beta_{x\theta}\theta - c_{xx}\dot{u}_0 + c_{x\theta}\dot{\theta} = -q_x + m_A \ddot{u}_0 - m_S \ddot{\theta}, \\ Q' - (N\theta)' + \beta_{yy} v_0 + c_{yy} \dot{v}_0 = q_y - m_A \ddot{v}_0, \\ M' + \beta_{x\theta} u_0 - \beta_{\theta\theta}\theta + c_{x\theta}\dot{u}_0 - c_{\theta\theta}\dot{\theta} = Q + m_z + m_I \ddot{\theta} - m_S \ddot{u}_0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь введены обобщенные характеристики жесткости и вязкости основания

$$\left[\beta_{xx}, \beta_{x\theta}, \beta_{\theta\theta}\right](x) = \beta_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad \beta_{yy}(x) = \beta_y b_r,$$
$$\left[c_{xx}, c_{x\theta}, c_{\theta\theta}\right](x) = c_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad c_{yy}(x) = c_y b_r$$

и обобщенные массовые характеристики слоистого стержня

$$\left[m_A, m_S, m_I\right](x) = \sum_{k=1}^{s} \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA. \tag{6}$$

Для нормальных напряжений примем закон вязкоупругого деформирования

$$\sigma_x^{(k)}(x,y,t) = E_k \varepsilon_x(x,y,t) + \eta_k \dot{\varepsilon}_x(x,y,t), \quad (k = 1,...,s). \tag{7}$$

Касательные напряжения могут быть получены из условий равновесия сдвигаемой части $y \in [y, y_{s+1}]$ элемента dx

$$\tau_{yx}^{(k)}(x,y) = -\frac{1}{b_k(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{y}^{y_{s+1}(x)} \sigma_x(x,y) b(x,y) dy \right). \tag{8}$$

Погонную сдвигающую силу (производную от интеграла в (8)) аппроксимируем выражением

$$\frac{\partial N^{\sec}(x,y)}{\partial x} = b_0 \tau_0(x) f_\tau(y), \tag{9}$$

где $f_\tau(y)$ – заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям $f_\tau(y_1) = f_\tau(y_{s+1}) = 0$; $\tau_0(x)$ – функциональный параметр, характеризующий продольное распределение сдвигающих сил; b_0 – характерный размер (ширина сечения).

Объединив (9), (8) и исключив при помощи условия равновесия (4) параметр τ_0, получим формулу касательного напряжения

$$\tau_{yx}^{(k)}(x,y,t)=\frac{Q(x,t)}{b_k(x,y)}\frac{f_\tau(y)}{F_\tau}, \quad F_\tau=\int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy. \tag{10}$$

Выражение для сдвиговой жесткости сечения D_Q может быть получено по условию эквивалентности энергии деформации интегрального усилия Q и напряжений (10). Заменив в D_Q модуль сдвига G_k на сдвиговую вязкость $\eta_{\tau k}$, получим энергетически осредненную сдвиговую вязкость V_Q сечения гибридного стержня. Запишем жесткость и вязкость в виде

$$D_Q(x)=\frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^{s}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{f_\tau^2}{b_k G_k}dy}, \qquad V_Q(x)=\frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^{s}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{f_\tau^2}{b_k \eta_{\tau k}}dy}. \tag{11}$$

Подстановка (7), (10) в (4) при учете (11) дает систему дифференциальных уравнений, связывающих обобщенные деформации, их скорости с интегральными силовыми факторами

$$\begin{cases} D_A\,\varepsilon_0-D_S\,\kappa+V_A\,\dot\varepsilon_0-V_S\,\dot\kappa=N,\\ -D_S\,\varepsilon_0+D_I\,\kappa-V_S\,\dot\varepsilon_0+V_I\,\dot\kappa=M,\\ \gamma_0 D_Q+\dot\gamma_0 V_Q=Q, \end{cases} \tag{12}$$

содержащую обобщенные жесткостные и вязкостные характеристики (11) и

$$\left[D_A,D_S,D_I\right](x)=\sum_{k=1}^{s}E_k\iint_{A_k}[1,y,y^2]dA, \quad \left[V_A,V_S,V_I\right](x)=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\iint_{A_k}[1,y,y^2]dA. \tag{13}$$

Объединив (5), (12) с учетом (1), имеем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений относительно искомых перемещений $u_0(x,t)$, $v_0(x,t)$, $\theta(x,t)$. Выполнив переобозначение $u_0\to u$, $v_0\to v$, запишем ее в виде

$$\begin{cases} (D_A u'-D_S\theta'+V_A\dot u'-V_S\dot\theta')'-\beta_{xx}u+\beta_{x\theta}\theta-c_{xx}\dot u+c_{x\theta}\dot\theta-\\ \qquad\qquad -m_A\ddot u+m_S\ddot\theta=-q_x(x,t),\\ [D_Q(\theta-v')+V_Q(\dot\theta-\dot v')]'-(N_{st}\theta)'+\beta_{yy}v+c_{yy}\dot v+m_A\ddot v=q_y(x,t),\\ (D_I\theta'-D_S u'+V_I\dot\theta'-V_S\dot u')'+\beta_{x\theta}u-\beta_{\theta\theta}\theta+c_{x\theta}\dot u-c_{\theta\theta}\dot\theta-\\ \qquad -D_Q(\theta-v')-V_Q(\dot\theta-\dot v')-m_I\ddot\theta+m_S\ddot u=m_z(x,t). \end{cases} \tag{14}$$

Здесь с целью линеаризации выполнено пренебрежение слагаемым $(Q\theta)'$, а в $(N\theta)'$ учтена лишь статическая компонента продольной силы. Система уравнений (14) описывает связанные продольно-поперечные колебания неоднородного вязкоупругого стержня на вязкоупругом основании. Использованные в ней одиннадцать интегральных характеристик (6), (11), (13) позволяют в полном объеме учесть реальные физические свойства неоднородного стержня. В частном случае при $D_S=0$, $V_A=V_S=V_I=0$, $N_{st}=0$, $c_{xx}=c_{yy}=c_{x\theta}=c_{\theta\theta}=0$, $m_S=m_I=0$, $\beta_{xx}=\beta_{x\theta}=\beta_{\theta\theta}=0$, $k=1$ из (14) вытекают линейные соотношения однородного стержня Тимошенко.

Для замыкания начально-краевой задачи записываются начальные условия

$$u(x,0)=v(x,0)=\theta(x,0)=0, \quad \dot{u}(x,0)=\dot{v}(x,0)=\dot{\theta}(x,0)=0 \tag{15}$$

и граничные – в концевых сечениях с координатами $x_*=0,l$:

$$u(x_*,t)=u_*(t), \quad v(x_*,t)=v_*(t), \quad \theta(x_*,t)=\theta_*(t), - \tag{16}$$

при наличии жестких связей, а при деформируемых –

$$N(x_*,t)\mp R_{x*}(t)\pm F_{x*}(t)=0,$$

$$\theta(x_*,t)N_{st}(x_*)-Q(x_*,t)\mp R_{y*}(t)\pm F_{y*}(t)=0,$$

$$M(x_*,t)\mp R_{\theta*}(t)\mp m_{z*}(t)=0,$$

где

$$R_{x*}(t)=D_{x*}u(x_*,t)+C_{x*}\dot{u}(x_*,t), \quad R_{y*}(t)=D_{y*}v(x_*,t)+C_{y*}\dot{v}(x_*,t),$$

$R_{\theta*}(t)=D_{\theta*}\theta(x_*,t)+C_{\theta*}\dot{\theta}(x_*,t)$ – реакции продольной, поперечной и угловой концевых вязкоупругих связей, имеющих характеристики жесткости D_{x*}, D_{y*}, $D_{\theta*}$ и вязкости C_{x*}, C_{y*}, $C_{\theta*}$. На левом конце применяются верхние, а на правом – нижние знаки. Заданные на границах стержня функции перемещений $u_*(t)$, $v_*(t)$, $\theta_*(t)$ позволяют описывать кинематические воздействия, в том числе – сейсмические.

2. Решение системы уравнений (14) представим в виде разложений

$$u(x,t)=\sum_{j=1}^{j_u}T_{uj}(t)\varphi_{uj}(x), \quad v(x,t)=\sum_{j=1}^{j_v}T_{vj}(t)\varphi_{vj}(x), \quad \theta(x,t)=\sum_{j=1}^{j_\theta}T_{\theta j}(t)\varphi_{\theta j}(x) \tag{17}$$

по заданным координатным базисам $\varphi_{uj}(x)$, $\varphi_{vj}(x)$, $\varphi_{\theta j}(x)$, удовлетворяющим граничным условиям с амплитудами – искомыми функциями времени:

$$T_{uj}(t),\ (j=1,...,j_u), \qquad T_{vj}(t),\ (j=1,...,j_v), \qquad T_{\theta j}(t),\ (j=1,...,j_\theta). \tag{18}$$

Подставив (17) в (14), полученные невязки уравнений ортогонализируем в интервале $x\in[0,l]$ к базисным функциям

$$\int_0^l L_1(u,v,x)\varphi_{uj}(x)dx=0,\ (j=1,...,j_u); \quad \int_0^l L_2(u,v,x)\varphi_{vj}(x)dx=0,\ (j=1,...,j_v),$$

$$\int_0^l L_3(u,v,\theta)\varphi_{\theta j}dx=0,\ (j=1,...,j_\theta).$$

Здесь L_i – дифференциальный оператор i-го уравнения системы (14). В результате получим систему $j_u+j_v+j_\theta$ уравнений относительно искомых функций (18), которая в матричном виде имеет вид

$$\sum_{\beta=0}^{2}\mathbf{A}^{(\alpha\beta)}\frac{d^\beta}{dt_\beta}\mathbf{T}_u+\sum_{\beta=0}^{2}\mathbf{B}^{(\alpha\beta)}\frac{d^\beta}{dt_\beta}\mathbf{T}_v+\sum_{\beta=0}^{2}\mathbf{C}^{(\alpha\beta)}\frac{d^\beta}{dt_\beta}\mathbf{T}_\theta=\mathbf{G}^{(\alpha)}(t), \quad (\alpha=1,2,3) \tag{19}$$

$$\mathbf{T}_u(t)=[T_{u1}...T_{uj_u}]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{T}_v(t)=[T_{v1}...T_{vj_v}]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{T}_\theta(t)=[T_{\theta1}...T_{\theta j_\theta}]^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

Девять матриц $\mathbf{A}^{(\alpha\beta)}=\{a_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$, $\mathbf{B}^{(\alpha\beta)}=\{b_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$, $\mathbf{C}^{(\alpha\beta)}=\{c_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$ (и три вектора $\mathbf{G}^{(\alpha)}=\{g_i^{(\alpha)}\}$) имеют j_u, j_v, j_θ столбцов при $\beta=1,2,3$ соответственно и j_u, j_v, j_θ строк при $\alpha=1,2,3$. Интегральные компоненты в (19) определяются выражениями

$$a_{ij}^{(1,0)}=\int_0^l\varphi_{ui}[(D_A\varphi'_{uj})'-\beta_{xx}\varphi_{uj}]dx, \quad a_{ij}^{(1,1)}=\int_0^l\varphi_{ui}[(V_A\varphi'_{uj})'-c_{xx}\varphi_{uj}]dx,$$

$$a_{ij}^{(1,2)} = -\int_0^l \varphi_{ui} m_A \varphi_{uj} dx, \quad b_{ij}^{(1,0)} = b_{ij}^{(1,1)} = b_{ij}^{(1,2)} = 0, \quad c_{ij}^{(1,2)} = \int_0^l \varphi_{ui} m_S \varphi_{\theta j} dx,$$

$$c_{ij}^{(1,0)} = -\int_0^l \varphi_{ui}[(D_S\varphi'_{\theta j})' - \beta_{x\theta}\varphi_{\theta j}]dx, \quad c_{ij}^{(1,1)} = -\int_0^l \varphi_{ui}[(V_S\varphi'_{\theta j})' + c_{x\theta}\varphi_{\theta j}]dx, \quad ,$$

$$a_{ij}^{(2,0)} = a_{ij}^{(2,1)} = a_{ij}^{(2,1)} = 0, \quad b_{ij}^{(2,0)} = -\int_0^l \varphi_{vi}[(D_Q\varphi'_{vj})' - \beta_{yy}\varphi_{vj}]dx,$$

$$b_{ij}^{(2,1)} = -\int_0^l \varphi_{vi}[(V_Q\varphi'_{vj})' - c_{yy}\varphi_{vj}]dx, \quad b_{ij}^{(2,2)} = -\int_0^l \varphi_{vi}(m_A\varphi_{vj})dx,$$

$$c_{ij}^{(2,0)} = \int_0^l \varphi_{vi}[(D_Q\varphi_{\theta j})' - (N_{st}\varphi_{\theta j})']dx, \quad c_{ij}^{(2,1)} = \int_0^l \varphi_{vi}(V_Q\varphi_{\theta j})'dx, \quad c_{ij}^{(2,2)} = 0,$$

$$a_{ij}^{(3,0)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i}[(D_S\varphi'_{uj})' - \beta_{x\theta}\varphi_{uj}]dx, \quad a_{ij}^{(3,1)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i}[(V_S\varphi'_{uj})' - c_{xx}\varphi_{uj}]dx,$$

$$a_{ij}^{(3,2)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} m_S \varphi_{uj} dx, \quad b_{ij}^{(3,0)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i} D_Q \varphi'_{vj} dx, \quad b_{ij}^{(3,1)} = \int_0^l \varphi_{\theta i} V_Q \varphi'_{vj} dx,$$

$$b_{ij}^{(3,2)} = 0, \quad c_{ij}^{(3,0)} = \int_0^l \varphi_{\theta i}[(D_I\varphi'_{\theta j})' - \beta_{\theta\theta}\varphi_{\theta j} - D_Q\varphi_{\theta j}]dx,$$

$$c_{ij}^{(3,1)} = -\int_0^l \varphi_{\theta i}(V_Q + c_{\theta\theta})\varphi_{\theta j} dx, \quad c_{ij}^{(3,2)} = \int_0^l \varphi_{\theta i}[(V_I\varphi_{\theta j})' - m_I\varphi_{\theta j}]dx,$$

$$g_i^{(1)}(t) = -\int_0^l \varphi_{ui} q_x(x,t)dx, \quad g_i^{(2)}(t) = \int_0^l \varphi_{vi} q_y(x,t)dx, \quad g_i^{(3)}(t) = \int_0^l \varphi_{\theta i} m_z(x,t)dx.$$

Систему уравнений (19) запишем в компактном виде

$$\mathbf{A}_2\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_0\mathbf{T} = \mathbf{G}, \tag{21}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u \\ \mathbf{T}_v \\ \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{C}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} & \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{C}_{2i} \\ \mathbf{A}_{3i} & \mathbf{B}_{3i} & \mathbf{C}_{3i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(1)} \\ \mathbf{G}^{(2)} \\ \mathbf{G}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3).$$

3. Решение однородного уравнения, соответствующего (21), будем искать в виде

$$\mathbf{T}_u(t) = \mathbf{K}_u \exp(\lambda t), \quad \mathbf{T}_v(t) = \mathbf{K}_v \exp(\lambda t), \quad \mathbf{T}_\theta(t) = \mathbf{K}_\theta \exp(\lambda t), \tag{22}$$

где $\mathbf{K}_u$, $\mathbf{K}_v$, $\mathbf{K}_\theta$ – числовые векторы, содержащие по j_u, j_v, j_θ элементов соответственно. Подстановка (22) в (21) для однородного уравнения дает характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_1(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_2(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_3(\lambda) \end{bmatrix} = 0, \tag{23}$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_i = \mathbf{\Lambda}^{(i0)} + \lambda\mathbf{\Lambda}^{(i1)} + \lambda^2\mathbf{\Lambda}^{(i2)}, \quad \mathbf{\Lambda} \in [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}], \quad (i = 1,2,3)$$

степени $2r$ ($r = j_u + j_v + j_\theta$) и позволяет решить проблему собственных значений и векторов любым из известных способов.

В случае стержня с симметричной относительно отсчетной поверхности структурой имеем $D_S = V_S = m_S = 0$. Если дополнительно для характеристик основания в (5) положить $\beta_{x\theta} = c_{x\theta} = 0$, то в (19), (21) получим $\mathbf{B}^{(1,\beta)} = \mathbf{C}^{(1,\beta)} = \mathbf{A}^{(2,\beta)} = \mathbf{A}^{(3,\beta)} = 0$ ($\beta = 0,1,2$), что приведет к распадению системы (19) на два матричных блока

$$\sum_{\beta=0}^{2} \mathbf{A}^{(1,\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_u = 0, \qquad \sum_{\beta=0}^{2} \mathbf{B}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_v + \sum_{\beta=0}^{2} \mathbf{C}^{(\alpha\beta)} \frac{d^\beta}{dt_\beta} \mathbf{T}_\theta = 0, \;\; (\alpha = 2,3)$$

описывающих свободные продольные и поперечные колебания с независимыми спектрами и частотными уравнениями

$$\det\left[\mathbf{A}^{(1,0)} + \lambda_u \mathbf{A}^{(1,1)} + \lambda_u^2 \mathbf{A}^{(1,2)} \right] = 0,$$

$$\det\left[\begin{array}{c:c} \mathbf{B}^{(2,0)} + \lambda_v \mathbf{B}^{(2,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{B}^{(2,2)} & \mathbf{C}^{(2,0)} + \lambda_v \mathbf{C}^{(2,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{C}^{(2,2)} \\ \hdashline \mathbf{B}^{(3,0)} + \lambda_v \mathbf{B}^{(3,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{B}^{(3,2)} & \mathbf{C}^{(3,0)} + \lambda_v \mathbf{C}^{(3,1)} + \lambda_v^2 \mathbf{C}^{(3,2)} \end{array} \right] = 0.$$

Постановка задачи о собственных колебаниях стержня, основанная на уравнениях (21), позволяет для выявления критических состояний стержня применить динамический критерий устойчивости

$$\lambda_{\min}(N_{cr}) = 0.)$$

Тогда (23) примет вид

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(10)} & 0 & \mathbf{C}^{(10)} \\ 0 & \mathbf{B}^{(20)} & \mathbf{C}^{(20)}(N_{\mathrm{cr}}) \\ \mathbf{A}^{(30)} & \mathbf{B}^{(30)} & \mathbf{C}^{(30)} \end{bmatrix} = 0. \qquad (24)$$

Раскрывая определитель (24) блочной матрицы с квадратными диагональными блоками при $\det \mathbf{A}^{(10)} \neq 0$, $\det \mathbf{B}^{(20)} \neq 0$, получим

$$\det\left(\left[\mathbf{C}^{(30)} - \mathbf{A}^{(30)} \left\{ \mathbf{A}^{(10)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(10)} \right] - \mathbf{B}^{(30)} \left\{ \mathbf{B}^{(20)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(20)}(N_{cr}) \right) = 0. \qquad (25)$$

Представив продольную силу $N(x) = P\, n(x)$ через функцию формы $n(x)$ и параметр P, из (25) может быть получено значение критического параметра P_{cr}. Для стержня симметричной структуры при $\beta_{x\theta} = c_{x\theta} = 0$ (25) принимает вид

$$\det\left(\mathbf{C}^{(30)} - \mathbf{B}^{(30)} \left\{ \mathbf{B}^{(20)} \right\}^{-1} \mathbf{C}^{(20)}(P_{cr}) \right) = 0.$$

4. Частное решение. Представим нагрузки в виде произведения

$$q(x,t) = \bar{q}(x) f(t), \quad q \in [q_x, q_y, m_z], \qquad (26)$$

координатного профиля нагрузки $\bar{q}(x)$ и безразмерной функции времени $f(t)$, записанной в форме ряда Фурье

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{k_0}\left(a_{qk}\cos k\omega_q t+b_{qk}\sin k\omega_q t\right), \tag{27}$$

$$a_{qk}=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}\tilde{q}(t)\cos k\omega_q t\,dt,\quad b_{qk}=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}\tilde{q}(t)\sin k\omega_q t\,dt,$$

где ω_q, $\tau=2\pi/\omega_q$ – частота и период заданной динамической нагрузки $\tilde{q}(t)$. Каждая из нагрузок q_x, q_y, m_z (26) может быть введена со своей специфической функцией (27).

Учитывая (26), (27) для векторов $\mathbf{G}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2,3$), в правой части (21) получим

$$\mathbf{G}^{(\alpha)}(t)=\bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)}\sum_{k=0}^{k_0}\left(a_{qk}\cos k\omega_q t+b_{qk}\sin k\omega_q t\right),$$

$$\bar{g}_i^{(1)}=-\int_0^l \varphi_{ui}\bar{q}_x(x)dx,\ (i=1,...,j_u),\qquad \bar{g}_i^{(2)}=\int_0^l \varphi_{vi}\bar{q}_y(x)dx,\ (i=1,...,j_v),$$

$$\bar{g}_i^{(3)}=\int_0^l \varphi_{\theta i}\bar{m}_z(x)dx,\ (i=1,...,j_\theta).$$

Частное решение системы уравнений (21) зададим в форме

$$\mathbf{T}_u(t)=\sum_{k=0}^{k_0}\left(\mathbf{H}_k^{(u)}\cos k\omega_q t+\mathbf{S}_k^{(u)}\sin k\omega_q t\right),\quad \mathbf{T}_v(t)=\sum_{k=0}^{k_0}\left(\mathbf{H}_k^{(v)}\cos k\omega_q t+\mathbf{S}_k^{(v)}\sin k\omega_q t\right),$$

$$\mathbf{T}_\theta(t)=\sum_{k=0}^{k_0}\left(\mathbf{H}_k^{(\theta)}\cos k\omega_q t+\mathbf{S}_k^{(\theta)}\sin k\omega_q t\right),$$

Тогда из (21) для k-й гармоники имеем систему шести уравнений

$$\begin{cases}[\mathbf{A}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{A}^{(i2)}]\mathbf{H}_k^{(u)}+k\omega_q\mathbf{A}^{(i1)}\mathbf{S}_k^{(u)}+\\ \qquad +[\mathbf{B}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{B}^{(i2)}]\mathbf{H}_k^{(v)}+k\omega_q\mathbf{B}^{(i1)}\mathbf{S}_k^{(v)}+\\ \qquad +[\mathbf{C}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{C}^{(i2)}]\mathbf{H}_k^{(\theta)}+k\omega_q\mathbf{C}^{(i1)}\mathbf{S}_k^{(\theta)}=a_{qk}\bar{\mathbf{G}}^{(i)},\quad k=0,1,...\\ -k\omega_q\mathbf{A}^{(i1)}\mathbf{H}_k^{(u)}+[\mathbf{A}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{A}^{(i2)}]\mathbf{S}_k^{(u)}-\\ \qquad -k\omega_q\mathbf{B}^{(i1)}\mathbf{H}_k^{(v)}+[\mathbf{B}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{B}^{(i2)}]\mathbf{S}_k^{(v)}-\\ \qquad -k\omega_q\mathbf{C}^{(i1)}\mathbf{H}_k^{(\theta)}+[\mathbf{C}^{(i0)}-k^2\omega_q^2\mathbf{C}^{(i2)}]\mathbf{S}_k^{(\theta)}=b_{qk}\bar{\mathbf{G}}^{(i)},\quad k=1,2....\end{cases} \tag{28}$$

($i=1,2,3$) относительно искомых векторов $\mathbf{H}_k^{(u)}$, $\mathbf{S}_k^{(u)}$, $\mathbf{H}_k^{(v)}$, $\mathbf{S}_k^{(v)}$, $\mathbf{H}_k^{(\theta)}$, $\mathbf{S}_k^{(\theta)}$. При $k=0$ в (28) записываются три уравнения для векторов $\mathbf{H}_0^{(u)}$, $\mathbf{H}_0^{(v)}$, $\mathbf{H}_0^{(\theta)}$.

Просуммировав частное решение и решение однородной системы, получаем общее решение неоднородной системы (21). Удовлетворив его начальным условиям (15) имеем функции перемещений в начально-краевой задаче динамики продольно-поперечных колебаний слоисто-неоднородного стержня.

5. Основные соотношения для гибридной стержневой системы. Рассматривая стержневой ансамбль системы, выполнив преобразования локальных координат к глобальным, получим три группы соотношений – уравнения движения, кинематические и физические уравнения в виде

$$\mathbf{A}_S\,\mathbf{S}(t)+\mathbf{F}(t)+\mathbf{F}_d(t)=0,$$
$$\mathbf{A}_W\mathbf{W}(t)+\mathbf{L}(t)+\tilde{\mathbf{L}}=0,$$
$$\mathbf{B}^{-1}\left[\mathbf{L}(t)-\mathbf{L}_T\right]+\mathbf{B}_V^{-1}\,\dot{\mathbf{L}}(t)=\mathbf{S}(t).$$

Здесь $\mathbf{W}$ – вектор узловых перемещений; $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_T$, $\tilde{\mathbf{L}}$ – векторы обобщенных деформаций стержней – полных, температурных и геометрических несовершенств; $\mathbf{S}$ – вектор концевых усилий в стержнях; $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_d=-\mathbf{M}_W\ddot{\mathbf{W}}$ – векторы нагрузок – заданных динамических и инерционных, приведенных к узловым; $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_W=\mathbf{A}_S{}^{\mathrm{T}}$ – матрицы преобразования – силового и кинематического базисов; $\mathbf{M}_W$ – инерционная матрица системы, сформированная из матриц масс стержней.

С использованием жесткостных характеристик (13) вектор температурных деформаций для j-го стержня записывается в виде

$$\mathbf{L}_{Tj}(t)=\begin{bmatrix}\Delta l_T & \theta_{b,T} & \theta_{e,T}\end{bmatrix}_j^{\mathrm{T}},$$

$$\theta_{b,T}=\int_l\frac{N_T\bar{D}_S+M_T\bar{D}_A}{\bar{D}_A\bar{D}_I-\bar{D}_S{}^2}\left(1-\bar{x}\right)dx,\quad \theta_{e,T}=\int_l\frac{N_T\bar{D}_S+M_T\bar{D}_A}{\bar{D}_A\bar{D}_I-\bar{D}_S{}^2}\bar{x}dx,\quad \Delta l_T=\int_l\frac{N_T\bar{D}_I+M_T\bar{D}_S}{\bar{D}_A\bar{D}_I-\bar{D}_S{}^2}dx.$$

Матрица податливости системы $\mathbf{B}_S=\mathrm{diag}[\mathbf{B}_{S_1}...\mathbf{B}_{S_n}]$ сформирована из матриц податливости гибридных стержней при учете сдвигов

$$\mathbf{B}_{Sj}=\begin{vmatrix}\int_l\frac{D_I}{D}dx & \int_l\frac{(1-l)D_S}{lD}dx & \int_l\frac{xD_S}{lD}dx\\ \int_l\frac{(1-\bar{x})D_S}{D}dx & \int_l\left[\frac{(1-l)^2D_A}{l^2D}+\frac{1}{l^2D_Q}\right]dx & \int_l\left[\frac{(1-l)lD_A}{l^2D}-\frac{1}{l^2D_Q}\right]dx\\ \int_l\frac{\bar{x}D_S}{D}dx & \int_l\left[\frac{(1-l)lD_A}{l^2D}-\frac{1}{l^2D_Q}\right]dx & \int_l\left[\frac{x^2D_A}{l^2D}+\frac{1}{l^2D_Q}\right]dx\end{vmatrix} \tag{29}$$

Здесь $D=D_ID_A-D_S{}^2$ – инвариант жесткостных характеристик при параллельном переносе осей. Аналогично (29) определяется и матрица вязкости $\mathbf{B}_V=\mathrm{diag}[\mathbf{B}_{V1}...\mathbf{B}_{Vn}]$ – при замене одноименных характеристик жесткости D на характеристики вязкости V.

Окончательно для гибридной стержневой системы разрешающее матричное уравнение в перемещениях может быть представлено в традиционной форме

$$\mathbf{M}_W\ddot{\mathbf{W}}(t)+\mathbf{R}_V\dot{\mathbf{W}}(t)+\mathbf{R}_W\mathbf{W}(t)=\mathbf{F}(t)+\mathbf{F}_0, \tag{30}$$

$$\mathbf{R}_W=\mathbf{A}_S\mathbf{B}_S^{-1}\mathbf{A}_W,\quad \mathbf{R}_V=\mathbf{A}_S\mathbf{B}_V{}^{-1}\mathbf{A}_W,\quad \mathbf{F}_0=-\mathbf{A}_S\mathbf{B}_S^{-1}\tilde{\mathbf{L}},$$

где $\mathbf{R}_W$, $\mathbf{R}_V$, $\mathbf{M}_W$ – матрицы жесткости, вязкого сопротивления и инерции. Вектор искомого решения следует подчинить начальным условиям $\mathbf{W}(0)=0$, $\dot{\mathbf{W}}(0)=0$.

Формулировка (30) позволяет использовать известные методы решения задач динамики, в том числе – методы Ньюмарка, Вильсона и другие.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается решение на основе метода Бубнова-Галеркина начально-краевой задачи динамического расчета гибридного вязкоупругого стержня. При учете осредненного сдвига и взаимодействия с внешней средой сформулированы основные группы уравнений: движения, физические и кинематические соотношения. Методом Фурье на основе использования заданных координатных функций задача сведена к системе матричных уравнений для вектор-функций времени, отражающих изменение перемещений и углов поворота. Сформированы матричные уравнения динамики гибридных стержневых систем.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ проект 14-01-00102.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. – Новосибирск: Наука, 1980. – 218 с.
2. Конюшков Г.В., Мусин Р.А. Специальные методы сварки давлением. – Гарант Ай Пи Эр Медиа, 2009. – 632 с.
3. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем: Монография. – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 488 с.
4. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамический расчет многослойных стержней переменного сечения // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. научн. трудов, Саратов: СГТУ, 2010. – с. 96–104.
5. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Динамика слоистых рам из разносопротивляющихся материалов // Известия вузов. Строительство, 2011. – № 11. – с. 10–19.

SUMMARY

The decision of the initial-boundary dynamic problem of the composite visco-elastic rod by Bubnov-Galerkin method is suggested. The basic dynamic system equations (motion, kinematic and physical equations) is obtain taking into account of the average shear deformation and external medium interaction. By Furie' method the problem is transform to decision of the matrix equations for the vector time-functions represented the displacement. The basic coordinate functions is used in this method. The matrix system equations is receive for the composite rods system.

E-mail: mavr@hnet.ru
nemirov@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 25.09.2014