УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

д.ф.-м.н. **Гурьянов Н.Г.**, к.ф.-м.н. **Тюленева О.Н.**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

Уравнения трехмерной теории упругости в цилиндрической системе координат как относительно перемещений, так и относительно напряжений опубликованы в известных монографиях. Наиболее компактная форма их записи приведена в монографиях [1], [2]. Аналогичные уравнения задачи термоупругости, построенные с использованием соотношений Дюгамеля-Неймана приведены в монографии [3]. Все они обладают одним недостатком – не позволяют получить интегрируемые комбинации, что до последнего времени приводило к непреодолимым трудностям в их решении. В монографии [4] эту проблему для уравнений теории упругости удалось решить, введя дополнительное уравнение относительно объемной деформации. Хотя это уравнение записано и проинтегрировано уже в работе [1], однако его не удалось использовать при решении всей системы разрешающих уравнений.

Целью представленной работы является построение наиболее удобной для интегрирования системы уравнений теомоупругости, и их решение.

В качестве исходных выберем уравнения из монографии [3]

$$\Delta w+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right]+\frac{2(1+\upsilon)R^2}{E}Z=0,$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}\right)u+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right]-\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{2(1+\upsilon)R^2}{E}X=0, \quad (1)$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}\right)v+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right]+\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{2(1+\upsilon)R^2}{E}Y=0,$$

$$\theta=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha}u+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right).$$

Здесь $\alpha,\beta,\gamma-$цилиндрические координаты (первая отнесена к радиусу цилиндра R, третья - к его высоте H), $u,v,w-$перемещения вдоль координаты α, второе – в окружном, третье вдоль γ, $T-$температура тела, α_T-температурный коэффициент линейного расширения, $E,\upsilon-$модуль упругости и коэффициент Пуассона, $\theta-$ объемная деформация, $\{X,Y,Z\}-$компоненты вектора массовых сил, $\varepsilon=\dfrac{H}{R}$,

$$\Delta\equiv\nabla^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}, \qquad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}. \quad (2)$$

Действуя на первое уравнение системы (1) оператором $\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial\gamma}(\ )$, на второе уравнение оператором $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha)$, на третье уравнение – оператором $\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(\ )$, и суммируя полученные уравнения, после достаточно громоздких вычислений приходим к уравнению

$$\left(1+\frac{1}{(1-2\upsilon)}\right)\Delta\theta-\frac{2(1+\upsilon)\alpha_T}{(1-2\upsilon)}\Delta T+\frac{2(1+\upsilon)R}{E}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha X)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial Y}{\partial\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Z}{\partial\gamma}\right]=0\,.$$

Принимая уравнение теплопроводности в виде

$$\Delta T=0\,, \tag{3}$$

при отсутствии массовых сил получаем уравнение $\Delta\theta=0$.

Заменяем последнее уравнение системы (1) только что полученным и добавляем к системе уравнение теплопроводности. Считая массовые силы равными нулю, приходим к системе разрешающих уравнений

$$\begin{gathered}
\Delta T=0\,, \qquad \Delta\theta=0\,,\\
\Delta w+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial T}{\partial\gamma}\right]=0\,,\\
\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}\right)u+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right]-\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial v}{\partial\beta}=0\,,\\
\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}\right)v+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial\beta}\right]+\frac{2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\beta}=0\,,
\end{gathered} \tag{4}$$

позволяющая ее интегрировать.

Из первых трех уравнений определяются температура, объемная деформация, и перемещение w. Процедуру интегрирования последних двух уравнений изложим ниже.

Однако порядок системы (4) выше порядка исходной системы, поскольку при построении уравнения $\Delta\theta=0$ проводилось дополнительное дифференцирование. Это приводит к увеличению числа постоянных интегрирования и нехватке граничных условий для определения их значений.

В монографии [4] доказано, что выполнение условия

$$\theta=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha}u+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\gamma}\right) \tag{5}$$

устраняет этот недостаток, то есть полностью решает проблему.

Переходя к построению точного решения системы уравнений (4), рассматриваем вначале частный случай, когда искомые функции линейны относительно координаты γ. Он встречается при расчете цилиндрических резервуаров, заполненных жидкостью.

Периодическое по β решение ищется в виде

$$T(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=\left[T_{1n}(\alpha)+T_{2n}(\alpha)\gamma\right]\cos(n\beta), \tag{6}$$

где n –любое число. Тогда при сделанных предположениях относительно коэффициентов получаем уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)T_{mn}=0\,, \quad (m=1\,;2). \tag{7}$$

Замечание. Возможно представление функции T как нечетной на интервале $(-\pi\,,\pi)$, тогда в (6) вместо косинуса следует поставить синус. Допустима и комбинация функций косинуса и синуса. Решение в этих случаях практически не отличается от того, которое будет получено ниже для варианта (6).

Нетрудно проверить, что решением уравнений (7) являются функции

$$T_{10}(\alpha)=B_{10}^{1}+B_{10}^{2}\ln\alpha\,,\qquad T_{20}(\alpha)=B_{20}^{1}+B_{20}^{2}\ln\alpha\,,$$
$$T_{1n}(\alpha)=B_{1n}^{1}\,\alpha^{n}+B_{1n}^{2}\,\alpha^{-n}\,,\quad T_{2n}(\alpha)=B_{2n}^{1}\,\alpha^{n}+B_{2n}^{2}\,\alpha^{-n},\quad (n>0). \tag{8}$$

Поскольку уравнение относительно объемной деформации не отличается от уравнения теплопроводности, при тех ре допущениях его решение

$$\theta(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=\left[\theta_{1n}(\alpha)+\theta_{2n}(\alpha)\gamma\right]\cos(n\beta),$$
$$\theta_{10}(\alpha)=A_{10}^{1}+A_{10}^{2}\ln\alpha\,,\qquad \theta_{20}(\alpha)=A_{20}^{1}+A_{20}^{2}\ln\alpha\,, \tag{9}$$
$$\theta_{1n}(\alpha)=A_{1n}^{1}\,\alpha^{n}+A_{1n}^{2}\,\alpha^{-n}\,,\quad \theta_{2n}(\alpha)=A_{2n}^{1}\,\alpha^{n}+A_{2n}^{2}\,\alpha^{-n},\quad (n>0),$$

здесь A_{mn}^{k} , B_{mn}^{k} – постоянные интегрирования.

В результате представления решения третьего уравнения системы (4) в виде

$$w(\alpha\,,\beta\,,\gamma)=\left[w_{1n}(\alpha)+w_{2n}(\alpha)\gamma\right]\cos(n\beta), \tag{10}$$

после подстановки в него соотношений (6), (8), (9) оно распадается на две группы уравнений.

Для $n=0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)w_{10}+\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(L_{20}^{1}+L_{20}^{2}\ln\alpha\right)=0\,,\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)w_{20}=0\,, \tag{11}$$

и для $n>0$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)w_{1n}+\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(L_{2n}^{1}\alpha^{n}+L_{2n}^{2}\,\alpha^{-n}\right)=0\,,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)w_{2n}=0\,. \tag{12}$$

Здесь

$$L_{mn}^{k}=A_{mn}^{k}-2(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{mn}^{k}\,. \tag{13}$$

После их интегрирования получаем

$$w_{10}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{10}^{1}+C_{10}^{2}\ln\alpha+\frac{1}{4}L_{20}^{1}\,\alpha^{2}+L_{20}^{2}\,\frac{\alpha^{2}}{4}(\ln\alpha-1)\right],$$
$$w_{20}(\alpha)=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{20}^{1}+C_{20}^{2}\ln\alpha\right), \tag{14}$$
$$w_{11}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left\{C_{11}^{1}\,\alpha+C_{11}^{2}\,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{8}L_{21}^{1}\alpha^{3}+\frac{1}{2}L_{21}^{2}\,\alpha\ln\alpha\right\},$$
$$w_{21}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{21}^{1}\,\alpha+C_{21}^{2}\,\frac{1}{\alpha}\right),$$
$$w_{1n}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)\varepsilon}\left[C_{1n}^{1}\alpha^{n}+C_{1n}^{2}\alpha^{-n}+\frac{1}{(n+1)}L_{2n}^{1}\,\alpha^{n+2}-\frac{1}{(n-1)}L_{2n}^{2}\,\alpha^{-n+2}\right],$$
$$w_{2n}=-\frac{R}{(1-2\upsilon)\varepsilon}\left(C_{2n}^{1}\alpha^{n}+C_{2n}^{2}\alpha^{-n}\right).$$

Здесь C_{mn}^{k} – постоянные интегрирования.

Решение последних двух уравнений системы (4) ищется в виде

$$u(\alpha,\beta,\gamma)=u_n(\alpha,\gamma)\cos(n\beta),\qquad v(\alpha,\beta,\gamma)=v_n(\alpha,\gamma)\sin(n\beta),$$
$$u_n(\alpha,\gamma)=u_{1n}(\alpha)+u_{2n}(\alpha)\gamma,\qquad v_n(\alpha,\gamma)=v_{1n}(\alpha)+v_{2n}(\alpha)\gamma\,. \tag{15}$$

В случае осесимметричной деформации цилиндра $(n=0)$ перемещение $v\equiv 0$, и последнее уравнение системы (4) выполняется тождественно, а четвертое записывается следующим образом

$$\left(\Delta-\frac{1}{\alpha^2}\right)u_0+\frac{R}{(1-2\upsilon)}\left[\frac{\partial\theta_0}{\partial\alpha}-2(1+\upsilon)\alpha_T\frac{\partial T_0}{\partial\alpha}\right]=0\,.$$

Оно приводит к паре уравнений, их решением являются функции

$$\begin{aligned}u_{10}&=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{10}^{1}\,\alpha+D_{10}^{2}\,\frac{1}{\alpha}+L_{10}^{2}\alpha\ln\alpha\right],\\ u_{20}&=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{20}^{1}\,\alpha+D_{20}^{2}\,\frac{1}{\alpha}+L_{20}^{2}\alpha\ln\alpha\right].\end{aligned}\tag{16}$$

Суммируя два последних уравнения системы (4) при $n>0$ после подстановки соотношений (13) и (15) и вычитая из первого второе, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2+2n+1}{\alpha^2}\right)(u_{1n}+v_{1n})=\frac{2n\,R}{(1-2\upsilon)}L_{1n}^{2}\,\alpha^{-(n+1)},\\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2+2n+1}{\alpha^2}\right)(u_{2n}+v_{2n})=\frac{2n\,R}{(1-2\upsilon)}L_{2n}^{2}\,\alpha^{-(n+1)},\end{aligned}\tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2-2n+1}{\alpha^2}\right)(u_{1n}-v_{1n})=-\frac{2n\,R}{(1-2\upsilon)}L_{1n}^{1}\,\alpha^{(n-1)},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{n^2-2n+1}{\alpha^2}\right)(u_{2n}-v_{2n})=-\frac{2n\,R}{(1-2\upsilon)}L_{2n}^{1}\,\alpha^{(n-1)}.$$

Их решение при $n=1$

$$u_{11}+v_{11}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{11}^{1}\alpha^2+D_{11}^{2}\alpha^{-2}+L_{11}^{2}\right],$$

$$u_{21}+v_{21}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{21}^{1}\alpha^2+D_{21}^{2}\alpha^{-2}+L_{21}^{2}\right].$$

$$u_{11}-v_{11}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left\{D_{31}^{1}+D_{31}^{2}\ln\alpha+L_{11}^{1}\alpha^2\right\},$$

$$u_{21}-v_{21}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left\{D_{41}^{1}+D_{41}^{2}\ln\alpha+L_{21}^{1}\alpha^2\right\},$$

откуда следует

$$\begin{aligned}u_{11}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^{1}+L_{11}^{1}\right)\alpha^2+D_{31}^{1}+L_{11}^{2}+D_{11}^{2}\alpha^{-2}+D_{31}^{2}\ln\alpha\right],\\ v_{11}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{11}^{1}-L_{11}^{1}\right)\alpha^2-D_{31}^{1}+L_{11}^{2}+D_{11}^{2}\alpha^{-2}-D_{31}^{2}\ln\alpha\right],\end{aligned}\tag{18}$$

$$u_{21}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{21}^{1}+L_{21}^{1}\right)\alpha^{2}+L_{21}^{2}+D_{41}^{1}+D_{21}^{2}\alpha^{-2}+D_{41}^{2}\ln\alpha\right],$$

$$v_{21}=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{21}^{1}-L_{21}^{1}\right)\alpha^{2}+L_{21}^{2}-D_{41}^{1}+D_{21}^{2}\alpha^{-2}-D_{41}^{2}\ln\alpha\right],$$

Решением системы (17) в случае $n>1$ являются

$$u_{1n}+v_{1n}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{1n}^{1}\alpha^{(n+1)}+D_{1n}^{2}\alpha^{-(n+1)}+L_{1n}^{2}\;\alpha^{-(n-1)}\right],$$

$$u_{2n}+v_{2n}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{2n}^{1}\alpha^{(n+1)}+D_{2n}^{2}\alpha^{-(n+1)}+L_{2n}^{2}\;\alpha^{-(n-1)}\right],$$

$$u_{1n}-v_{1n}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{3n}^{1}\alpha^{(n-1)}+D_{3n}^{2}\alpha^{-(n-1)}+L_{1n}^{1}\;\alpha^{(n+1)}\right],$$

$$u_{2n}-v_{2n}=-\frac{R}{2(1-2\upsilon)}\left[D_{4n}^{1}\alpha^{(n-1)}+D_{4n}^{2}\alpha^{-(n-1)}+L_{2n}^{1}\;\alpha^{(n+1)}\right].$$

Тогда

$$\begin{aligned}
u_{1n}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{1n}^{1}+L_{1n}^{1}\right)\alpha^{(n+1)}+\left(L_{1n}^{2}+D_{3n}^{2}\right)\alpha^{-(n-1)}+D_{1n}^{2}\alpha^{-(n+1)}+D_{3n}^{1}\alpha^{(n-1)}\right],\\
v_{1n}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{1n}^{1}-L_{1n}^{1}\right)\alpha^{(n+1)}+\left(L_{1n}^{2}-D_{3n}^{2}\right)\alpha^{-(n-1)}+D_{1n}^{2}\alpha^{-(n+1)}-D_{3n}^{1}\alpha^{(n-1)}\right],\\
u_{2n}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{2n}^{1}+L_{2n}^{1}\right)\alpha^{(n+1)}+\left(L_{2n}^{2}+D_{4n}^{2}\right)\alpha^{-(n-1)}+D_{2n}^{2}\alpha^{-(n+1)}+D_{4n}^{1}\alpha^{(n-1)}\right],\\
v_{2n}&=-\frac{R}{4(1-2\upsilon)}\left[\left(D_{2n}^{1}-L_{2n}^{1}\right)\alpha^{(n+1)}+\left(L_{2n}^{2}-D_{4n}^{2}\right)\alpha^{-(n-1)}+D_{2n}^{2}\alpha^{-(n+1)}-D_{4n}^{1}\alpha^{(n-1)}\right].
\end{aligned}\tag{19}$$

Здесь D_{mn}^{k} – постоянные интегрирования.

В результате выполнения условия (5) получаем

$$\begin{aligned}
A_{10}^{1}&=-\frac{1}{2(1-\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{2(1-\upsilon)D_{10}^{1}+\frac{\left[4(1-\upsilon)C_{20}^{1}-C_{20}^{2}\right]}{2\varepsilon^{2}}-(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\alpha_{T}B_{10}^{2}\right\},\\
A_{10}^{2}&=-\frac{1}{(1-\upsilon)}\left[\frac{1}{2\varepsilon^{2}}C_{20}^{2}-(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{10}^{2}\right],\qquad A_{20}^{2}=\frac{(1+\upsilon)}{(1-\upsilon)}\alpha_{T}B_{20}^{2},\\
A_{20}^{1}&=\frac{1}{2(1-\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{-2(1-\upsilon)D_{20}^{1}+(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\alpha_{T}B_{20}^{2}\right\},\\
A_{11}^{1}&=\frac{2}{(3-4\upsilon)}\left[(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{11}^{1}-\frac{1}{\varepsilon^{2}}C_{21}^{1}-D_{11}^{1}\right],\\
A_{11}^{2}&=\frac{1}{2(3-4\upsilon)}\left[4(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{11}^{2}-D_{31}^{2}-\frac{4}{\varepsilon^{2}}C_{21}^{2}\right],\\
A_{21}^{1}&=\frac{2}{(3-4\upsilon)}\left[(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{21}^{1}-D_{21}^{1}\right],\qquad A_{21}^{2}=\frac{1}{2(3-4\upsilon)}\left[4(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{21}^{2}-D_{41}^{2}\right],\\
A_{1n}^{1}&=\frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[-(n+1)D_{1n}^{1}+2(1+\upsilon)\alpha_{T}B_{1n}^{1}-\frac{2}{\varepsilon^{2}}C_{2n}^{1}\right],
\end{aligned}\tag{20}$$

$$A_{1n}^2 = \frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[2(1+\upsilon)\alpha_T B_{1n}^2 + (n-1)D_{3n}^1 - \frac{2}{\varepsilon^2}C_{2n}^2\right],$$

$$A_{2n}^1 = \frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[2(1+\upsilon)\alpha_T B_{2n}^1 - (n+1)D_{2n}^1\right],$$

$$A_{2n}^2 = \frac{1}{(3-4\upsilon)}\left[(n-1)D_{4n}^2 + 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{2n}^2\right].$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрический резервуар, заполненный жидкостью. Его верхний $(\gamma = 1)$ и нижний $(\gamma = 0)$ торцы жестко защемлены. Оба торца и внутренняя боковая поверхность $\alpha = r$ теплоизолированы, внешняя боковая поверхность $\alpha = R$ нагревается температурой $T(1, \beta, \gamma) = \Theta_0 + \Theta_1 \cos\beta$, причем Θ_0, Θ_1 – постоянные.

Краевые условия задачи термоупругости принимаются следующие

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\alpha}(t, \beta, \gamma) = \rho H(1-\gamma),\\ w(1, \beta, 0) = 0, \quad u(1, \beta, 0) = 0, \quad v(1, \beta, 0) = 0,\\ w(t, \beta, 0) = 0, \quad v(t, \beta, 0) = 0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$w(1, \beta, 1) = 0, \quad w(t, \beta, 1) = 0, \quad u(1, \beta, 1) = 0, \quad v(1, \beta, 1) = 0, \quad v(t, \beta, 1) = 0,$$

причем напряжение определяется из соотношений Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{\frac{(1-2\upsilon)}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \upsilon\theta - (1+\upsilon)\alpha_T T\right\},$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left\{\frac{(1-2\upsilon)}{R\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial \gamma} + \upsilon\theta - (1+\upsilon)\alpha_T T\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \frac{E}{2(1+\upsilon)R}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right), \qquad \sigma_{\beta\gamma} = \frac{E}{2(1+\upsilon)R}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial \gamma}\right),$$

r – радиус внутренней поверхности цилиндра $\left(t = \frac{r}{R}\right)$, ρ – плотность заполняющей резервуар жидкости.

Вычисления проводились для следующих параметров задачи

$$R = 10 м, \quad r = 9.95\ м, \quad H = 30\ м,\ E = 7.4 \cdot 10^4\ МПа, \quad \upsilon = 0.34,$$

$$\rho = 0.75 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}, \quad \alpha_T = 23 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{град}, \quad \Theta_0 = 60^0\ C, \quad \Theta_1 = 25^0\ C.$$

Перемещения v, w пренебрежимо малы, как и смещение u точек наружной боковой поверхности. Перемещения u точек внутренней боковой поверхности практически не меняются по высоте и не превышают 0.004 толщины стенки резервуара.

Максимальное напряжение $\frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{E} = 0.003$ возникает в окрестности боковых поверхностей и практически не меняется по высоте резервуара. Остальные напряжения значительно меньше. Без учета влияния температуры качественная картина та же, но максимальные напряжения на 1- 2 порядка меньше.

РЕЗЮМЕ

В работе получено уравнение относительно объемной деформации с учетом температурных членов, представлены интегрируемые комбинации уравнений термоупругости в перемещениях. Построены точные решения уравнений трехмерной задачи термоупругости в предположении линейной зависимости температуры и перемещений вдоль оси цилиндра. Рассмотрен пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости – М., Высшая школа – 1966 – 227 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости – М., Наука – 1981 – 687 с.
3. Коваленко А.Д. Избранные труды – Киев, Наукова думка – 1976 – 762 с.
4. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра – Казань, Изд-во Казанского университета – 2008 – 207с.

SUMMARY

Equation of relatively irrotational deformation with consideration of temperature members was obtained, integrable combinations of thermoelasticity equations in translation are presented in the study. Exact solutions of equations of three-dimensional thermoelasticity problem are developed under the assumption of linear dependence of temperature and translations along cylinder axis. An example is considered.

E-mail: tdv.ton@mail.ru

Поступила в редакцию 11.10.2014