УДК 518:517.5:536.2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИЛОГАРИФМАМИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КРУГА ПРИ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ВТОРОГО РОДА

д.ф.-м.н. **Мелешко И.Н.**, д.ф.-м.н. **Чигарев А.В.**, к.ф.-м.н. **Ширвель П.И.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Рассматривается вторая основная задача теории теплопроводности (задача Неймана) для уравнения Лапласа в единичном круге с центром в начале координат:

$$\Delta T = 0, \qquad r < 1, \tag{1}$$

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = \alpha T_0 f(\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{2}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; T=$T(r,\theta)$ – температура; α – коэффициент теплоотдачи; T_0 – характерная температура, а $f(\varphi)$ – известная функция. Направление нормали совпадает с направлением возрастания r.

В [1] с помощью методов теории аналитических функций и специальных формул для интеграла Шварца получено приближенное представление комплексного теплового потенциала задачи (1), (2), позволяющего определять приближенно все основные элементы теплового потока.

Основной физической величиной, характеризующей процесс теплопроводности, является температура. В данном случае с помощью интеграла Дини отдельно для функции температуры конструируется ее приближенное представление полилогарифмами.

Полученная в работе приближенная формула сравнительно проста, устойчива и позволяет оценивать погрешности вычислений.

1. Точное представление решения краевой задачи (1)-(2) интегралом Дини.

Представим граничное условие (2) в виде

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1} = \beta T_0 f(\varphi), \qquad -\pi \le \varphi \le \pi,$$

где $\beta = \left.\frac{\alpha r}{\lambda}\right|_{r=1}$ – коэффициент Био, и воспользуемся представлением решения задачи Неймана для круга (см., например, [2]) интегралом Дини. Тогда точное решение краевой задачи (1), (2) запишется в виде

$$T(r,\varphi) = -T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z| d\tau + C, \qquad t = e^{i\tau}; \;\; z = re^{i\varphi}; \tag{3}$$

где C действительная произвольная постоянная.

Примечание. Если известно значение температуры в некоторой точке $|z^*| \le 1$, то из (4) следует, что

$$C = T(z^*) + T_0 \frac{\beta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln|t - z^*| d\tau.$$

2. Приближенное решение краевой задачи (1), (2).

Приближенное решение краевой задачи будем конструировать на основе формулы (3). Вначале получим приближенную формулу для интеграла Дини в правой части формулы (3)

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t-z|d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau - \ln 2\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)d\tau \tag{4}$$

Зададим на отрезке $[-\pi;\pi]$ систему точек

$$\varphi_k = kh, \qquad k=-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n, \quad h=\frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность $f(\varphi)$ интеграла Дини на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi)\approx \tilde{f}(\varphi)=\sum_{-n}^{n}\Theta_k(\varphi)f(\varphi_k), \tag{5}$$

где

$$\Theta_k(\varphi)=\begin{cases}1, \varphi\in\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\varphi_k+\frac{h}{2}\right];\\ 0, \varphi \,\overline{\in}\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\varphi_k+\frac{h}{2}\right].\end{cases}$$

Тогда, подставляя в представление (3) интеграла Дини вместо плотности ее приближение по формуле (5), получим приближенную формулу

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\ln|t-z|d\tau \approx \sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)f(\varphi_k)-\frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{-n}^{n}f(\varphi_k), \tag{6}$$

где коэффициенты

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau. \tag{7}$$

Теорема 1. Коэффициенты приближенной формулы (6) $A_k(r,\varphi)$ *неотрицательны, а для их вычисления имеет место формула*

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\left[h\ln 2+\mathrm{Im}\left(L^2\left(ze^{-i(\varphi_k-h/2)}\right)-L^2\left(ze^{-i(\varphi_k+h/2)}\right)\right)\right]. \tag{8}$$

где

$$L^2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}\text{. (дилогарифм Эйлера).} \tag{9}$$

Доказательство. Так как $\ln\frac{2}{|t-z|}>0, r\neq 1$, то из представления (7) для коэффициентов $A_k(r,\varphi)$ следует, что все они неотрицательны для всех r и φ $(r<1;-\pi\le\varphi\le\pi)$.

Далее

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\ln 2d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\ln\frac{1}{|t-z|}d\tau=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos k(\tau-\varphi)\right)d\tau=\frac{h\ln 2}{\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{r^k}{k}\sin k(\tau-\varphi)\Bigg|_{\varphi_k-h/2}^{\varphi_k+h/2}\right)=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r^k\sin k(\varphi-\varphi_k+h/2)}{k^2}-\frac{r^k\sin k(\varphi-\varphi_k-h/2)}{k^2}\right)=$$

$$=\frac{h\ln 2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{z^k e^{-i(\varphi_k-h/2)}}{k^2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{z^k e^{-i(\varphi_k+h/2)}}{k^2}\right].$$

Последнее равенство приводит к формуле (8).

Примечание. Ряды

$$L^S(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^S}.$$

Определяют полилогарифмы порядка s – специальные функции, изученные в [4] (а также в [1]), где с помощью полилогарифмов найдены новые формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и решения некоторых краевых задач математической физики.

Полилогарифм второго порядка (9) принято называть дилогарифмом Эйлера [5].

Заменив интеграл Дини в правой части формулы (3) его приближением по формуле (6), найдем приближенное решение краевой задачи

$$T(r,\varphi) \approx \widetilde{T}(r,\varphi) = T_0\beta\left[\frac{h\ln 2}{\pi}\sum_{-n}^{n} f\left(\varphi_k\right) - \sum_{-n}^{n} A_k\left(r,\varphi\right) f\left(\varphi_k\right)\right] + C. \tag{10}$$

Теперь получим неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (10).

Теорема 2. Пусть функция $f(\varphi)$ *в граничном условии (2) непрерывна на отрезке* $[-\pi;\pi]$, *тогда имеет место равномерная по* r *и* φ $\left(r \le 1, -\pi \le \varphi \le \pi\right)$ *следующая оценка погрешности формулы (10):*

$$\left|T(r,\varphi) - \widetilde{T}(r,\varphi)\right| \le 4T_0\beta\,\omega(f;h)\ln 2, \tag{11}$$

где $\omega(f;h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$\left|T(r,\varphi) - \widetilde{T}(r,\varphi)\right| \le 2M_1 T_0\beta h \ln 2, \qquad r \le 1; \quad -\pi \le \varphi \le \pi; \quad M_1 = \max_{\varphi\in[-\pi;\pi]}\left|f'(x)\right|. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left|T(r,\varphi) - \widetilde{T}(r,\varphi)\right| = \frac{T_0\beta}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau) - \widetilde{f}(\tau)\right]\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau - \ln 2\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau) - \widetilde{f}(\tau)\right]d\tau\right|,$$

где функция $\widetilde{f}(\varphi)$ определена формулой (5). В силу положительности

$\ln\dfrac{2}{|t-z|}$ ($z = re^{i\varphi}$; $t = e^{i\tau}$; $r \le 1$)

$$\left|T(r,\varphi) - \widetilde{T}(r,\varphi)\right| \le \frac{T_0\beta}{\pi}\max_{\varphi\in[-\pi;\pi]}\left|f(\varphi) - \widetilde{f}(\varphi)\right|\left[\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{2}{|t-z|}d\tau + \ln 2\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\right].$$

Далее, так как

$$\ln\frac{2}{|t-z|} = -\operatorname{Re}\ln\left(1 - \frac{t}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{t}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k\cos k(\tau-\varphi)}{k},$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{|t-z|}d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(\tau-\varphi)d\tau = 0,$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|T(r,\varphi) - \widetilde{T}(r,\varphi)\right| \le 4T_0\beta\max_{\varphi\in[-\pi;\pi]}\left|f(\varphi) - \widetilde{f}(\varphi)\right|\ln 2. \tag{13}$$

Если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, то

$$\left|f(\varphi) - \widetilde{f}(\varphi)\right| \le \omega(f;h), \qquad -\pi \le \varphi \le \pi. \tag{14}$$

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко установить с помощью формулы Тейлора, что

$$\left|f(\varphi) - \widetilde{f}(\varphi)\right| \le \frac{M_1}{2}h, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi. \tag{15}$$

Из неравенств (13)–(15) следуют неравенства (11), (12).

3. Пример.

В качестве примера рассмотрим стационарную тепловую задачу для единичного круга с граничным условием на окружности

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \alpha T_0 (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi), \ -\pi \le \varphi \le \pi.$$

В этом случае удается получить точное решение задачи

$$T(r,\varphi) = T_0 \beta \operatorname{Im}\left[\left(z - \frac{1}{z}\right)\ln(1+z)\right], \tag{16}$$

где $\ln(1+z)$ – ветвь логарифмической функции, принимающая на промежутке (–1;1) действительной оси действительные значения.

Результаты вычислений по точной (16) и приближенной (10) формулам при $n = 20$, $n = 50$ и $n = 100$ приведены в таблице. Для определенности положено $T_0 = 1$; $\beta = 1$.

Таблица – Изменение температуры в направлении возрастания r по точной и приближенной формулам

r	$T\left(r;\frac{\pi}{4}\right)$	$\widetilde{T}_{20}\left(r;\frac{\pi}{4}\right)$	$\widetilde{T}_{50}\left(r;\frac{\pi}{4}\right)$	$\widetilde{T}_{100}\left(r;\frac{\pi}{4}\right)$
0.1	0.041846	0.041666	0.041816	0.041838
0.3	0.161401	0.160827	0.161306	0.161377
0.5	0.322505	0.321498	0.322340	0.322464
0.7	0.518788	0.517311	0.518545	0.518727
0.9	0.745141	0.743161	0.744816	0.745059

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость приближенной формулы (10).

РЕЗЮМЕ

В работе получено приближенное представление полилогарифмами решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Равномерные оценки погрешности приближенной формулы позволяют проводить вычисления с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко И.Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Мн.: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Пыхтеев Г.Н., Мелешко И.Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычислений. – Мн.: Изд-во БГУ, 1976. – 67 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.

SUMMARY

Some results of approximate solution of heat conduction theory problem for circle are presented. It is obtained an approximate of the second main boundary problem of heat conduction theory (Neyman's problem) for Laplasse equation in an individual circle. A uniform estimation of approximate formula error makes it possible to conduct calculations with the given accuracy.

E-mail: Chigarev@rambler.ru

Поступила в редакцию 25.10.2014