

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

д.ф.-м.н. Леоненко Д.В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Ранее в статье [1] было исследовано поведение упругопластического стержня со сжимаемым наполнителем под действием квазистатических нагрузок. В работах [2, 3] приведены результаты по динамическому деформированию трехслойных стержней и пластин, скрепленных с безынерционным основанием Винклера. В монографии [4] рассмотрено поведение трехслойных элементов без упругого основания. Деформирование однородных балок и плит на упругом основании при статических и динамических воздействиях исследовано в [5]. Здесь рассматриваются собственные колебания трёхслойного стержня, связанного с инерционным основанием Винклера.

1. Постановка задачи. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x, t)$. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k и ρ_k – толщина и плотность k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя), $h_3 = 2c$.

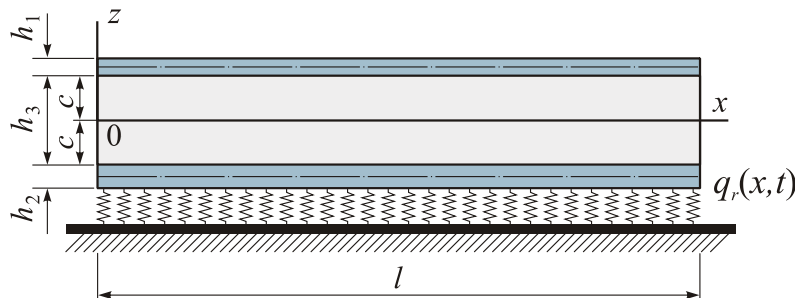


Рисунок 1. – Расчетная схема трехслойного стержня

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. Рассмотрим случай *инерционного* основания в рамках модели Винклера. В нашем случае стержень прикреплен к основанию вторым слоем, поэтому выполняется следующее соотношение

$$q_r = -\kappa_0 w_2 - m_f \ddot{w}_2,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели); m_f – инерционный член основания.

Выпишем уравнения движения, описывающую собственные колебания, рассматриваемого трехслойного стержня в следующем виде:

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_1',_{xx} - a_5 u_2',_{xx} + a_2 w_1',_x + a_3 w_2',_x - 2a_6 w_1',_{xxx} + a_7 w_2',_{xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0, \\
& -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
& + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = 0, \\
& -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
& -a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + (m_2 + m_f) \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где a_i – жесткостные характеристики стержня; m_j – инерционные члены стержня [3].

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях $x = 0; l$ имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \tag{2}$$

Начальные условия движения будут ($t = 0$)

$$u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad \dot{u}_k(x, 0) = \dot{u}_{k0}(x); \quad w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad \dot{w}_k(x, 0) = \dot{w}_{k0}(x) \quad (k = 1, 2), \tag{3}$$

где $u_0^k(x)$, $\dot{u}_0^k(x)$, $w_0^k(x)$, $\dot{w}_0^k(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

2. Решение задачи. Решение начально-краевой задачи (1)–(3) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющей принятым граничным условиям (2):

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); & u_2(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \\
w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); & w_2(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Подстановка выражений (4) в (1) приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которая в матричном виде будет:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = 0, \tag{5}$$

где $[B]$ – квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij} ; $[M]$ – диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij} [2]; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – векторы, сформированные из искомым функций времени T_{mi} и их вторых производных:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_f + m_4 \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты b_i зависят от параметра m и приведены в [2].

Систему (5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} \ddot{T}_{mk} = 0 \quad (k = 1, \dots, 4). \quad (6)$$

Т. к. матрица $[M]$ диагональная, то от второй суммы осталось только одно k -е слагаемое. Для замыкания начально-краевой задачи к системе (6) необходимо добавить начальные условия (3).

Решение системы (6) ищем в виде

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (7)$$

где A_{mk} – амплитуда; ω_m – частота и α_{mk} – начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (7) в систему (6) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B]\{A\} = \omega^2 [M]\{A\}, \quad (8)$$

где $\{A\}$ – вектор, сформированный амплитудами A_{mk} .

Обращение в уравнении (8) матрицы $[M]$, так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \omega^2 \{A\}; \quad [R] = [M]^{-1}[B]; \quad ([R] - \omega^2 E)\{A\} = 0.$$

Решив задачу, получим четыре вещественных неотрицательных частоты. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырехчастотным. Следовательно, вместо решения (7) нужно принять:

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}). \quad (9)$$

Искомые перемещения теперь определяются выражениями (4) с учетом (9).

3. Численное исследование. При численном исследовании принимается, что слои стержня выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительными толщинами: $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,05$, $c = 0,09$. Торцы стержня свободно оперты на неподвижные опоры. Параметры упругой среды вычислялись по формулам из [5].

На рисунке 2 показана зависимость низшей частоты ω_{11} от толщины слоя внешней среды H_f . Кривые соответствуют различным моделям упругих оснований ($\kappa_0 = 50$ МПа/м, $m_f = 641$ кг/м²): 1 – безынерционная модель; 2 – инерционная модель. Коэффициент жесткости основания κ_0 остается в процессе изменения толщины H_f постоянным. При увеличении толщины слоя основания собственные частоты по двум моделям оснований постоянны при толщине $H_f \geq 1,5$. Для более тонких оснований система стержень-основание будет более жесткой за счет подпирания абсолютно жесткого основания, и частота по безынерционной модели (1) – постоянна. Учет инерции основания, начиная с $H_f \geq 1,5$, приводит к уменьшению исследуемой частоты в 2,1 раза.

Рисунок 3 иллюстрирует изменение минимальной частоты собственных колебаний ω_{11} в зависимости от коэффициента жесткости инерционного основания κ_0 при различной удельной массе основания m_f (кг/м²): 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500$, 3 – $m_f = 1000$, 4 – $m_f = 2000$. Из графиков следует, что учет инерции основания (2) приводит к уменьшению частоты более чем в 2 раза по сравнению с безынерционным основанием (1). При дальнейшем увеличении удельной массы основания частоты уменьшаются.

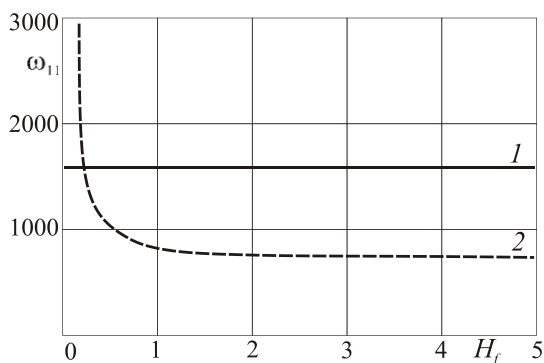


Рисунок 2. – Изменение частоты собственных колебаний ω_{11} в зависимости от толщины сжимаемого слоя основания

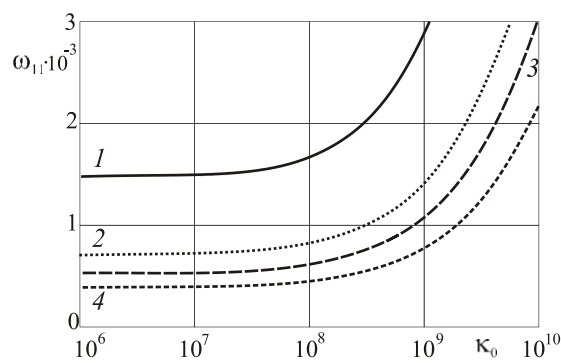


Рисунок 3. – Изменение частоты собственных колебаний ω_{11} в зависимости от коэффициента κ_0 (Па/м)

4. Выводы. Приведенные в работе аналитические и численные результаты, позволяют сделать вывод о существенном влиянии упругого основания средней и высокой жесткости на частоты. Увеличение толщины слоя основания при $H_f \geq 1,5$ перестает влиять на собственные частоты системы стержень-основание, как с учетом инерции основания, так и без ее учета.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф15РМ–024).

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы бернулли. Заполнитель жесткий, сжимаемый. Реакция основания описывается инерционной моделью винклера. Получена система дифференциальных уравнений движения и ее точное решение в перемещениях. Приведены численные результаты для трехслойного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Гу Юй // Теоретическая и прикладная механика: межведомст. сб. науч.-метод. ст. – Минск, 2005. – Вып. 19. – С. 67–75.
2. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
3. Леоненко, Д.В. Исследование собственных частот колебаний трехслойного стержня на упругом основании / Д.В. Леоненко // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2006. –Т. 11, №4. – С. 23–26.
4. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.V. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
5. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н.Леонтьев. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

SUMMARY

Natural vibrations of sandwich beam on an elastic inertial foundation considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the hypotheses bernoulli. Filler is hard, compressible. Reaction of foundation was described on the base of winkler's inertial model. Combined differential equations of motion and analytical solutions via displacement were received. Numerical solutions for sandwich beam were adduced.

E-mail: leoden@tut.by

Поступила в редакцию 02.11.2014