

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПРЕПРЕГА ПРИ ПРОКОЛЕ В НЕМ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

д.ф.-м.н. ¹Василевич Ю.В., к.т.н. ²Сахоненко В.М., к.т.н. ¹Сахоненко С.В.,
¹Неумержицкая Е.Ю.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²ОАО «Авангард» Сафоново, Россия

Альтернативой просверлённым отверстиям является формирование их методом прокалывания в еще неотвержденном полимерно-волокнистом материале конструкции. Хотя в процессе формирования отверстия с помощью заостренного стержня - индентора происходит раздвигание нитей и нарушение регулярной структуры материала изделия, однако силовое поле армирующих волокон в этом случае не прерывается, стенка отверстия из-за повышенного содержания волокон уплотняется, что и приводит к увеличению прочности на смятие между крепежным элементом и стенкой отверстия. В результате прокола нити теряют свое первоначальное прямолинейное положение, изгибаются и растягиваются. Наибольшему деформированию подвергаются нити, соприкасающиеся с поверхностью стержня. Осуществляют прокол отверстия на стадии, когда композиционный материал находится в состоянии препрега, т.е. когда полимерное связующее неотверждено и обладает минимальной величиной вязкости. Поэтому по мере продвижения конической части стержня возрастает зона уплотнения материала и повышается внутрислойное давление, которое приводит к перетеканию вязкого связующего через пористую волокнистую арматуру материала. При достаточно медленном процессе прокалывания через некоторое время наступает равновесное состояние измененной структуры материала с внедренным в нее индентором.

Пусть осуществлен прокол отверстия стержнем кругового сечения в многослойном препреге из тканых материалов, у которых нити утка и основы образуют взаимно-перпендикулярные семейства нитей. Это позволяет с полной уверенностью утверждать, что после установления равновесия все основные параметры этого процесса будут соблюдать симметрию относительно координатных осей. При этом (см. рис.1) та нить семейства «1», которая до деформации занимала положение на оси Ox , после деформации будет занимать положение на линии $ABCF$, нить семейства «2», лежащая на оси Oy до деформации, займет положение EM_1BCD после прокола отверстия. Линия $ABCD$ - это граница отверстия. После прокола отверстия препрег, расположенный в первом квадранте, можно разделить на зоны, имеющие характерные особенности: зона, ограниченная линией $HMAVM_1E$, содержит только нити семейства «1»; зона, в которой содержатся только нити семейства «2», ограничена линией $CFGD$; замкнутая зона BCB обладает тем свойством, что во всех точках этой зоны угол между нитями семейств равен нулю. Точки H и E - это точки, лежащие на одной и той же нити семейства «2» до деформации и после деформации соответственно, характеризующиеся тем, что они определяют границу деформативности нити. Точки F и G характеризуют участок деформативности нити семейства «1».

В этих зонах также выполняются условия равновесия [1], на основании которых следует, что напряжения растяжения и сжатия вдоль каждой из нитей в зоне BCB постоянны. Это положение позволяет легко связать напряженное состояние в точках основной зоны, ограниченной линией MM_1BCF с остальными зонами, расположенными в первом квадранте.

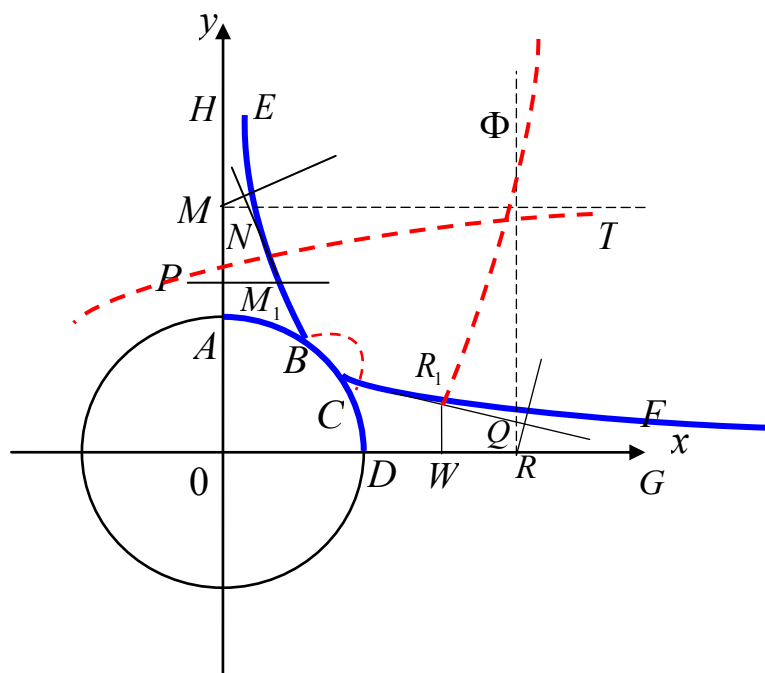


Рисунок 1. - Схема расположения характерных зон препрега после прокола отверстия.

Рассмотрим несколько подробнее зону $НМАВМ_1E$, вернее то, как в ней расположены нити семейства «1». На границе отверстия, т.е. на линии AB нити занимают положение части дуги окружности радиуса R_0 - радиус отверстия. Рассматриваемая зона освобождена от нитей семейства «2», поэтому на границе EM_1B и вблизи нее нити семейства «1» расположены менее плотно, чем внутри зоны. Поэтому, чем дальше от линии AB , тем быстрее распрямляется та часть нити, семейства «1», которая находится в рассматриваемой зоне. На некотором расстоянии от точки A вдоль оси Oy найдется нить, которая в зоне будет представлять собой отрезок. Также и все нити, расположенные выше, обладают этим свойством. Поэтому в местах пересечения нитей семейства «1» с линией EM_1B должен быть излом нитей. Под изломом следует понимать скачкообразное изменение касательных к нитям семейства «1» в точках перехода через линию EM_1B . Следует провести параллель между существованием излома нитей в точках резкого изменения граничных условий и поведением напряжений в таких же точках для твердого упругого тела. Как известно, в подобных точках для твердого упругого тела имеет место концентрация напряжений. Поэтому, если в теории упругости твердых тел позволительна концентрация напряжений, то в теории деформации препрегов – излом нитей.

Кроме установленного ранее понятия плоской среды исследования в виде препрега будем иметь в виду, что его размеры в плане достаточны для того, чтобы деформация со сдвигом при проколе отверстия не затрагивала бы точек препрега на достаточном удалении. Для этого, по крайней мере, достаточно считать, что препрег занимает всю плоскость, включая бесконечно удаленную точку.

Прежде чем поставить граничные условия для рассматриваемой задачи отметим, что в данной постановке она имеет осевую симметрию. В таком случае следует рассматривать граничные условия на линии EM_1BCF (см. рис. 1). На участке границы вдоль линии BC нити обоих семейств имеют форму дуги окружности радиуса R_0 . Это трансформируется в выполнение следующих трех условий:

$$R_1 = -R_0, \quad R_2 = -R_0, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

где R_1, R_2 - радиусы кривых, представляющих собой нити семейств после деформации; α_1, α_2 - углы, образованные касательными к кривым с осью Ox

В общем случае граничные условия на каком – то участке границы могут выражаться следующими зависимостями:

- в виде заданных напряжений или перемещений для семейства нитей;
- описывающими форму границы области;
- дающими выражение связей между напряжениями или перемещениями обоих семейств нитей;
- дающими описание других связей при решении задач, имеющих не меньшее значение для приложений.

Все это должно выражаться функциональными зависимостями. Граничные условия при этом, очевидно, могут быть в большом диапазоне произвольными, однако количество таких условий должно быть равно трем.

Рассмотрим, какие функциональные зависимости имеют место при проколе отверстия в условиях поставленной задачи. Отметим, что границу EM_1B формирует крайняя нить семейства «2», а границу CF формирует нить семейства «1». Граница EM_1B характеризуется тем, что здесь нормальное давление равно нулю, так как отсутствует внешняя нагрузка на крайнюю нить семейства «2», кроме растягивающих усилий. Таким образом, в любой точке границы EM_1B напряжения сжатия семейства нитей «2» равны нулю.

Второе граничное условие на границе EM_1B должно быть поставлено для нитей семейства «1». Для этого обратим внимание, что как до прокола отверстия, так и после точки всех нитей семейства «1», лежащие на оси Oy , остаются на этой же оси. Точное отражение этой зависимости представляет собой интегральное уравнение, решение которого несколько затруднительно. Более удачное представление этого граничного условия будет результатом пренебрежения бесконечно малыми более высокого порядка малости. Действительно, угол α_1 изменяется достаточно мало и это изменение колеблется около значения 2π . Кроме того, можно предположить, что нити семейства «1» в зоне $HMABM_1E$ растягиваются равномерно. Поэтому проекция перемещения на ось Ox всех точек границы EM_1B равна величине отрезка нити длиной x_0 вместе с его упругими и неупругими деформациями. Здесь x_0 - координата точки на нити семейства «1» до деформации, которая после деформации принадлежит линии EM_1B . Таким образом, во всех точках границы EM_1B выполняется следующее соотношение:

$$\left(1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}\right)x_0 = -u_2 \sin \alpha_2 + v_2 \cos \alpha_2. \quad (1)$$

Здесь γ_{11} и $\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$ - неупругая и упругая части относительной деформации нити семейства «1» [2]. Правая часть равенства определяет координату x_1 точки M_1 , причем $u_2 = MN$, $v_2 = NM_1$ - компоненты перемещения точки M в точку M_1 , определяемые как проекции перемещения точки M на нормаль и касательную в точке M_1 . Нетрудно показать, что

$$u_2 = c_{21} \sin \alpha_2 + c_{22} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \cos \alpha_2 - R_2 \sin(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha, \quad (2)$$

$$v_2 = c_{22} \sin \alpha_2 - c_{21} \cos \alpha_2 + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} [Z_{22} R_2 \sin \alpha_2 + R_2 \cos(\alpha_2 - \alpha)] d\alpha.$$

В результате подстановки (2) в (1) найдем:

$$x_0 = Z_{11} \left[-c_{21} + \int_{\alpha_{02}}^{\alpha_2} R_2 \cos \alpha d\alpha \right], \quad (3)$$

где $Z_{11} = \frac{1}{1 + \gamma_{11} + \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}}$; $Z_{22} = \frac{1}{1 + \gamma_{22} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}}}$; c_{21} , c_{22} - произвольные постоянные.

Отметим, что равенство (3) будет абсолютно выражать граничное условие, если участок границы AB (рис.1) будет представлять собой отрезок параллельный оси Ox . Отверстие при этом будет не совсем круглым, а таким как на заштрихованной части рис. 2.

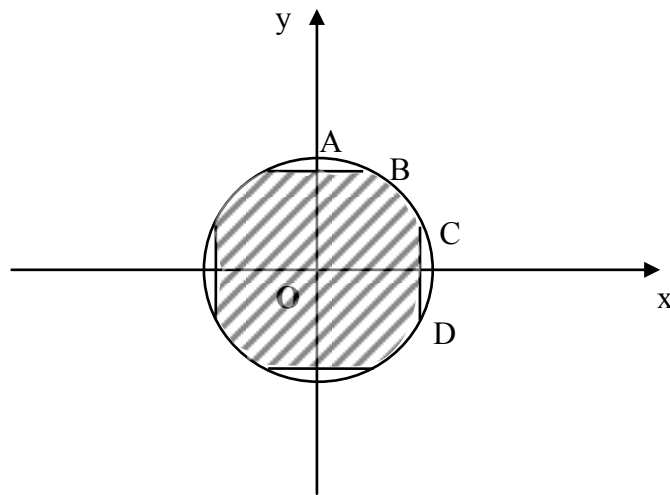


Рисунок 2. - Сечение прокалывающего элемента.

Если отверстие в препреге представлено таким как на рис. 2, то все нити семейства «1» в зоне $HMAVM_1E$ (см. рис. 1) прямолинейны. Для круглого отверстия нить AB имеет форму дуги окружности. Поэтому на некотором расстоянии от точки A все нити семейства «1» тоже будут искривлены. Такое искривление отражается на точности граничного условия (3). Однако найдется точка, выше которой нити семейства «1» имеют прямолинейную форму в рассматриваемой зоне и поэтому там граничное условие (3) выполняется точно.

На границе CF аналогичные граничные условия представляются в виде:

$$S_0 - y_0 = Z_{22} \left(-c_{12} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{01}} R_1 \sin \alpha d\alpha \right). \quad (4)$$

Рассмотрим, чему может быть равно выражение $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2}$ на участке границы EM_1B , если на этом участке $\sigma_{21} = 0$.

Отметим, что частные производные первого и второго порядков от функции σ_{21} по переменным $R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$ непрерывны как внутри области, так и в любой точке границы [1], поэтому будут справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) = \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \right) \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \right) \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \cdot \frac{dR_1}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \cdot \frac{dR_2}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \cdot \frac{dR_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \cdot \frac{dR_2}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_2} \right) - \\ &- \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках в первом слагаемом представляет собой обычную производную по переменной α_2 от функции σ_{21} . Поэтому первое слагаемое на основании равенства нулю σ_{21} имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{d\sigma_{21}}{d\alpha_2} \right) = 0.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$-\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \right) = -\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = -\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} \right) = 0.$$

Здесь параметр α_1 зависит только от переменной α_2 , поэтому предыдущие преобразования справедливы на основании очевидных равенств:

$$\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial}{\partial R_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} \right), \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial R_2} = 0.$$

На этом основании равны нулю и остальные слагаемые. Следовательно,

$$\frac{d}{d\alpha_2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} = C_2, \quad (5)$$

где C_2 - произвольная постоянная, не зависящая от переменной α_2 .

Аналогичную зависимость можно получить на участке границы CF :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} = C_1, \quad (6)$$

где C_1 - произвольная постоянная, не зависящая от переменной α_1 .

Граница области деформирования на периферии характеризуется предсдвиговым состоянием. Это означает, что во всех периферийных точках границы выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0, \sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{21} = 0,$$

где σ_{11}^0 и σ_{22}^0 - предельные напряжения растяжения, обеспечивающие предсдвиговое состояние; σ_{12} и σ_{21} - напряжения сжатия соответствующих семейств нитей.

Представленные граничные условия вместе с изложенными уравнениями в [1], [2] позволяют определять напряжения сжатия и растяжения в каждом семействе нитей при проколе отверстий в препрегах. При этом очевидно, что напряжения могут достигать предельных значений, при которых наступает момент разрушения армирующего материала. Вследствие этого возникают вопросы о создании и оформлении теоретических и экспериментальных основ учения о «прочности» препрегов и изделий из них. Здесь следует заметить, что можно судить о прочности при растяжении путем экспериментальной проверки прочности при растяжении армирующего материала. Такие эксперименты многочисленны, проверены и убедительны. Что касается сжатия армирующего материала в вязкоупругом состоянии, то таких испытаний до сих пор не проводилось, отсутствуют методики их проведения и поэтому нет ни малейшего представления ни о предельной величине таких напряжений, ни о тех факторах, которые связывают их с напряжениями растяжения, вообще говоря, неотделимых друг от друга.

В заключение можно сделать следующие выводы:

- изложенная в статье теория построения математической модели прокола отверстий в препрегах может быть обобщена и на другие задачи, касающиеся препрегов, если только напряженное состояние в них не приводит к потере устойчивости армирующего материала;
- граничные условия в количестве трех функциональных зависимостей для препрегов могут быть в большом диапазоне произвольными, выражающими либо заданные напряжения, либо перемещения, либо описывающими форму границы, либо выражающими связь между напряжениями и перемещениями и др.

РЕЗЮМЕ

Разработана математическая модель поведения препрега при проколе в нем круглого отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахоненко С.В. Уравнения равновесия при плоском напряженном состоянии препрегов // Вестн. Белорус. гос. уни-та. Сер. 1- 2004-№2.
2. Сахоненко С.В. Процессы растяжения и сжатия в материале препрегов при проколе отверстий / БГУ – Минск, 2004 – Деп. в ГУ «БелИСА» 10.03.2005 - №Д200576.

SUMMARY

The mathematical model of the behavior of the prepreg puncture it round hole.

E-mail: smat@bntu.by

Поступила в редакцию 17.09.2014