УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ СЖАТОГО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

к.т.н. **Косых Э.Г.**

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. В работе проведено уточнение классического решения о критической силе для стойки, закрепленной в нижнем торце и сжатой распределенной нагрузкой переменной интенсивности, полученное Ясинским [1] (рисунок 1). В своем классическом решении он свел рассматриваемую проблему к краевой задаче с неполными граничными условиями. Полученное решение он использовал в задаче о критической нагрузке для шарнирно опертого стержня, нагруженного симметрично относительно среднего сечения. Значение критического напряжения в срединном сечении (*x=L/2*) $\sigma_{kr} = 31.348E(i/l)^2$, приведенное в [1], приблизительно, и согласно предлагаемому в настоящей работе уточненному решению должно быть уменьшено до значения $\sigma_{kr} = 25.61E(i/l)^2$. Ранее устойчивость стержней переменной жесткости исследовалась в работах [2, 3].

Ясинский рассмотрел случай переменной интенсивности нагрузки для указанной задачи, которая в применении к сжатым стержням открытого верхнего пояса моста, получила название «задача Ясинского». В этом случае с помощью замены переменных уравнение продольного изгиба сведено к уравнению второго порядка, но в соответствующей краевой задаче учтены не все граничные условия. В предлагаемой работе для «задачи Ясинского» поставлена краевая задача с учетом всех граничных условий.

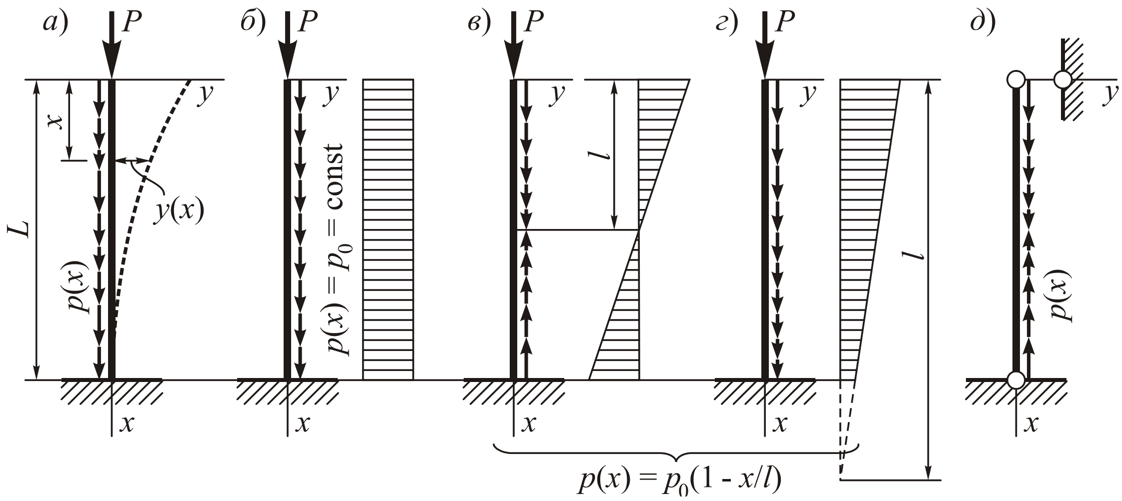

Рисунок 1.

Постановка задачи. Пусть функция нагружения *p(x)* представляет собой конечный многочлен

$$p(x) = p + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots .$$

В этом случае внутренняя продольная сжимающая сила в произвольном сечении стержня будет

$$N(x) = P + \int_0^x p(x)dx = P + px + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \ldots,$$

где P – сосредоточенная сила, приложенная в верхнем торце.

Соответствующее дифференциальное уравнение продольного изгиба в перемещениях Y будет [2, 3]:

$$\left(EIY''\right)'' + \left(\left(P + px + p_1\frac{x^2}{2} + p_2\frac{x^3}{3} + ...\right)Y'\right)' = 0\,. \tag{1}$$

где EI – изгибная жесткость поперечного сечения.

В тоже время, соответствующее уравнение Ясинского можно получить из (1), убрав в каждом слагаемом одну операцию дифференцирования и введя новую переменную $\theta = Y'$. В результате имеем уравнение второго порядка:

$$EI\theta'' + \left(P + px + p_1\frac{x^2}{2} + p_2\frac{x^3}{3} + ...\right)\theta = 0\,. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу о продольном изгибе как задачу Эйлера о бифуркации равновесных состояний сжатой стойки. Для этого решаем соответствующую краевую задачу, находя решение уравнения (1), удовлетворяющее некоторым граничным условиям $G(x, y) = 0$. Решение получим в матричном виде, сводя уравнение 4-го порядка (1) к двум уравнениям 2-го порядка. Для этого вводим переменные: $Y_1 \equiv Y;\ Y_2 = Y''$, а переменную Y сохраним для обозначения вектора с координатами Y_1, Y_2. Вместо дифференциального уравнения четвертого порядка получим матричное уравнение второго порядка для векторной переменной (Y):

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta + \beta_1 x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha + \beta \cdot x + \beta_1 \cdot \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 0\,, \tag{3}$$

где безразмерные параметры нагрузки

$$\alpha = PL^2 / El\,,\ \beta = pL^3 / El\,,\ \beta_1 = p_1L^4 / El\,.$$

В примере все другие параметры равны нулю. С помощью замены векторной переменной $(Y) = (V)\cdot(U)$ преобразуем уравнение (3).

Известно [6], что любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка (здесь и далее скобки при матрицах опущены):

$$Y'' + f_1(x)Y' + f_2(x)Y = 0 \tag{4}$$

может быть приведено к виду:

$$U'' + In(x)\cdot U = 0\,. \tag{5}$$

Матрицы-коэффициенты в (4) легко определяются сопоставлением уравнений (3) и (4). Выполняя указанную замену в исходном уравнении, получим:

$$(V'' + f_1\cdot V' + f_2\cdot V)\cdot U + (2V' + f_1\cdot V) + V\cdot U'' = 0\,. \tag{6}$$

Выберем V так, чтобы существовала обратная матрица $\bar{V}(x)$ и выполним условие

$$2V' + f_1\cdot V = 0\,.$$

Решением этого уравнения будет функция - матрица

$$V(x) = e^{-\frac{1}{2}\int f_1 dx}\,.$$

Разлагая $V(x)$ в ряд Тейлора, получим:

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2}(\beta\cdot x + \beta_1\cdot\dfrac{x^2}{2}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что первая и вторая производные $V(x)$ определяются линейно самой функцией $V(x)$. Это позволяет вынести за скобку в (6) справа матрицу V и, умножая (6) на обратную матрицу $\bar{V}$ слева, получим:

$$U''+\bar{V}\cdot[f_2(x)-\frac{1}{2}f_1'(x)-\frac{1}{4}f_1^2(x)]\cdot V\cdot U=0,$$
где множитель при функции $U(x)$ во втором слагаемом определен в [1] как инвариант линейной системы уравнений – $In(x)$.

Таким образом, система линейных уравнений (3) приведена к уравнению матричной форме специального вида (5). В задаче рассматриваемой в качестве примера инвариант $In(x)$ принимает вид ($In(x) = E(x)$):

$$E(x)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -0.5\beta_1 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\beta & 0\\ -0.5\alpha\beta & 0.5\beta\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}0.25\beta_1 & 0\\ -0.25(\beta^2+\alpha\beta_1) & 0.25\beta_1\end{pmatrix}\cdot x^2+$$
$$+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -0.25\beta\beta_1 & 0\end{pmatrix}\cdot x^3+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -0.0625\beta_1^{\;2} & 0\end{pmatrix}\cdot x^4. \tag{7}$$

Решение краевой задачи. Форма представления системы уравнений в виде (6) важна тем, что для матричного уравнения (7) получена фундаментальная система решений в виде функций представленных сходящимися степенными рядами [2]:

$$Com(\{E\},x)=I+\sum_{1}^{n}(-1)^n x^{2n}\sum_{m=0}^{\max\sum k_i}x^m\sum_{\sum k_i=m}\prod_{n_t=1}^{n}\left(E_{k_i}\right)a_{n_t i},$$
$$Sim(\{E\},x)=xI+\sum_{1}^{n}(-1)^n x^{2n+1}\sum_{m=0}^{\max\sum k_i}x^m\sum_{\sum k_i=m}\prod_{n_t=1}^{n}\left\{E_{k_i}\right\}b_{n_t i}. \tag{8}$$

Здесь $\{In\}$ – матрица–инвариант системы дифференциальных уравнений, $\{E_{k_i}\}$– соответствующие матричные коэффициенты при разложении матрицы-инварианта в степенной ряд. Скалярные множители $a_{n_t i}$, $b_{n_t i}$ в (8) определены формулами

$$a_{n_t i}=\{k_i!(2n_t-1+\sum k_j)(2n_t+\sum k_j)\}^{-1},$$
$$b_{n_t i}=\{k_i!(2n_t+\sum k_j)(2n_t+1+\sum k_j)\}^{-1}.$$

Пользование последними формулами требует следовать правилам:

1) $k_i=i$, i – порядок производной в разложении матрицы-инварианта;

2) при формировании общего коэффициента для произведения в суммах $\sum k_j$ складываются текущий и все предыдущие k_i.

Например, для парных произведений скалярный коэффициент в (8) имеет вид $a_{2_1 l}a_{2_2 q}$. Тогда

$$a_{2_1 l}a_{2_2 q}=\{l!(1+l)(2+l)q!(3+l+q)(4+l+q)\}^{-1}.$$

Уместно будет обратить внимание на некоммутативность этих произведений. Действительно, поменяв местами индексы l и q, получим

$$a_{2_1 q}a_{2_2 l}=\{q!(1+q)(2+q)l!(3+l+q)(4+l+q)\}^{-1}.$$

Здесь результат умножения первых двух скобок существенно отличается от произведения первых двух скобок в предыдущей формуле.

Если рассматривать систему уравнений с постоянными коэффициентами, то в (8) отличной от нуля будет только матрица постоянных коэффициентов , которую можно получить как нулевую производную от матрицы- инварианта системы дифференциальных уравнений. В этом случае вместо (8) получим функции

$$Com(\{E\},x)=I+\sum_{1}^{n}(-1)^n\frac{\{E_0\}^n x^{2n}}{2n!};\quad Sim(\{E\},x)=xI+\sum_{1}^{n}(-1)^n\frac{\{E_0\}^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

В работе [7] эти функции доопределяются дополнительными условиями и представлены как матричные косинус – cos({*e*},*x*) и синус – sin({*e*},*x*) , где $\{e\}\{e\}=\{In\}$, а е матриц $\{e\}$ имеется обратная. Теперь возвращаемся к исходным переменным, т.е. к решению исходного уравнения (3) в форме (5) Тогда

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = V \cdot Com(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + V \cdot Sim(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}' = V \cdot Com'(E(x),x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + V \cdot Sim'(E(x),x) \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + V' \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}' = (V \cdot Com(E(x),x))' \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + (V \cdot Sim(E(x),x))' \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}.$$

Определим постоянные (*C*),(*D*) начальными параметрами $Y_1(0),(Y_2(0)$. Из формул (8) следует

Com(*In*, 0) = I, *Com'*(*In*, 0)=*(0), Sim*(*In*, 0)=(0)*, Sim'*(*In*,0)=*I; V*(0) = I,

где I единичная матрица.

Полагая $x = 0$, получим:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{vmatrix} - V'(0) \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix}; \text{ здесь } V'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно

$$C_1 = Y_1(0), C_2 = Y_2(0), \ D_1 = Y_1'(0), \ D_2 = Y_2'(0) + \frac{1}{2}\beta \cdot Y_1(0).$$

Подставим эти значения постоянных. Получим решение уравнения (4) в виде матричной функции и ее производной в зависимости от начальных параметров, фактически решение Коши:

$$\begin{bmatrix} Y_1(x) \\ Y_2(x) \end{bmatrix} = \left(V \cdot Com(E,x) - V \cdot Sim(E,x) \cdot V'(0)\right) \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} + V \cdot Sim(E,(x) \cdot \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1'(x) \\ Y_2'(x) \end{bmatrix} = \left((V \cdot Com(E,x))' - (V \cdot Sim(E,x) \cdot V'(0))'\right) \cdot \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} + \left(V \cdot Sim(E,x)\right)' \cdot \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, в (9) приведено решение матричного дифференциального уравнения (3), линейно зависящее от начальных параметров. Очевидно, что нулевые начальные параметры определяют нулевое или, так называемое, тривиальное решение. Однако для краевых задач обычно заданы различные условия в произвольных местах границы. Например, для стержня это может быть другой конец при *x=1*. Пусть эти значения на границе будут равны нулю. Тогда, полагая в (9) *x=1*, получим однородную линейную систему уравнений:

$$\left(\begin{bmatrix} (V \cdot \mathrm{Com}(E,1) - V \cdot \mathrm{Sim}(E,1) \cdot V'(0)) & V \cdot \mathrm{Sim}(E,1) \\ (V \cdot \mathrm{Com}(E,1) - V \cdot \mathrm{Sim}(E,1) \cdot V'(0))' & (V \cdot \mathrm{Sim}(E,1))' \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y_1'(0) \\ Y_2'(0) \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что система линейных уравнений (10) всегда имеет нулевое (тривиальное) решение, которое соответствует в задаче продольного изгиба неизогнутой форме равновесия. Но наряду с тривиальным решением может существовать и ненулевое, если определитель в (10) равен нулю:

$$\det\left(\begin{bmatrix} (V\cdot \mathrm{Com}(E,1) - V\cdot \mathrm{Sim}(E,1)\cdot V'(0)) & V\cdot \mathrm{Sim}(E,1) \\ (V\cdot \mathrm{Com}(E,1) - V\cdot \mathrm{Sim}(E,1)\cdot V'(0))' & (V\cdot \mathrm{Sim}(E,1))' \end{bmatrix}\right)\cdot = 0\,. \tag{11}$$

Это алгебраическое уравнение имеет бесконечное множество корней, т.н. собственных значений краевой задачи, если, конечно, решение существует.

В задаче о потере устойчивости прямой формы равновесия сжатой стойки интересен в первую очередь наименьший по значению из корней, соответствующий наименьшим, в определенном смысле, значениям силовых параметров. При достижении которых возникает продольный изгиб и с их ростом развивается изгибная форма равновесия. Если подставить полученные собственные значения в (11), то с помощью (10) получим уравнения изгибной формы равновесия, возникшей в результате бифуркации при продольном изгибе. Меньшему корню будет соответствовать первая собственная форма продольного изгиба. Для старших собственных значений могут быть получены старшие собственные функции.

Ясинский поставил задачу устойчивости для стержня под действием самоуравновешенной распределенной нагрузкой, представляя его как конструкцию из двух «полустержней» под действием сил, равных по величине и направленных противоположно – к общему сечению. Следуя Ясинскому первой задачей такого рода будет рассмотрена конструкция из «полустержней» под нагрузкой постоянной интенсивности (рисунок 2). Для стойки с заделкой в нижнем торце (рисунок 2, справа) граничные условия будут:

$$Y_2(0)=Y_1(1)=Y_1'(1)=Y_2'(1)=0.$$

Параметр нагрузки	Ось абсцисс	детерминанта (11)
3.58895E+00	+ o	0.46
4.48619E+00	+ o	0.34
5.38343E+00	: d	0.22
6.28066E+00	+ o	0.11
7.17790E+00	+	-0.00
8.07514E+00	o +	-0.11
9.97238E+00	o +	-0.22
9.86961E+00	o +	-0.33

5.82307E+00	+ o	0.053
5.92177E+00	+ o	0.044
6.02046E+00	: d	0.034
6.11916E+00	+ o	0.025
6.21786E+00	+ o	0.016
6.31655E+00	+o	0.008
6.41525E+00	+	- 0.000
6.51395E+00	o+	- 0.008

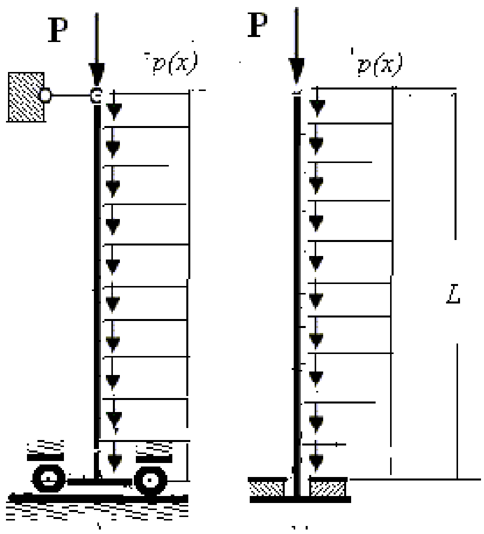

Рисунок 2

Тогда согласно решению (9) нижняя цифровая таблица на рисунке 2 дает для стойки $p_{кр}$=6.4106 EI/L^3 , но не $p_{кр}$=7.38 EI/L^3, как это следует из приведенного в [1] решения уравнения (2). Соответственно, сжимающая сила в срединном сечении будет равна $P_{кр}$= 25.64 E/L^2 вместо $P_{кр}$= 31.348EI / L^2.

В случае шарнирного опирания верхнего торца и подвижной заделки нижнего граничные условия будут

$$Y_2(0)=Y_1(0)=Y_1'(1)=Y_2'(1)=0.$$

Тогда согласно решению (9) верхняя цифровая таблица на рисунке 2 дает для стойки $p_{кр}$ = 7.178 EI/L^3 , но не $p_{кр}$=7.38 EI/L^3, как это следует из приведенного в [1] решения уравнения (2). Соответственно, сжимающая сила в срединном сечении будет равна $P_{кр}= 28.71\ EI/L^2$ вместо $P_{кр}= 31.348EI/L^2$.

При исследовании устойчивости трехслойных элементов конструкций необходимо применять уравнения, полученные в [8]–[15].

Выводы. Предложенная методика расчета критических параметров устойчивости сжатых неравномерно распределенной нагрузкой стержней, уточняет известное решение и вносит поправки до 24 %.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена устойчивость сжатых стержней под действием неравномерно распределенной нагрузки. Приведено аналитическое решение и численные результаты для двух видов граничных условий. Показано, что поправки в известное решение составляют до 24 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: Госиздат. технико-теоретической литературы. –1952. – 427 с.
2. Косых Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней. / Вестник СамГУ. Естественная серия. 2008. № 8/1 (67). – С. 390–399.
3. Косых Э.Г., Сейфер Д.В. Критическая нагрузка для сжатых стоек переменной жесткости. / Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 41–45.
4. Косых Э.Г. Собственные функции продольного изгиба стержней, сжатых распределенной нагрузкой. / Строительство и восстановление искусственных сооружений. Мат. III междунар. научно-практической конференции. Ч. 1. Гомель: БелГУТ. – 2014. – С. 64–70.
5. Косых, Э.Г. Устойчивость сжатых стоек переменной жесткости под воздействием распределенной нагрузки. / Строительство и восстановление искусственных сооружений: матер. Междунар. научно-практической конференции, Гомель, 29 марта 2013 г. / УО «БелГУТ». – Гомель: БелГУТ, 2013. – С. 100–105.
6. Степанов В.В.Курс дифференциальных уравнений.– М.:Физматгиз,1959. – 328 с.
7. Гантмахер Ф.Р.Теория матриц. – М: Гостехиздат, 1956. – 576 с.
8. Gorshkov A.G., Starovoitov É.I., Yarovaya A.V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. – International Applied Mechanics. 2001. T. 37. № 9. C. 1196–1203.
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads // International Applied Mechanics. – 2003. – T. 39. – № 12. C. 1458–1463.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular sandwich plates under local impulsive loads / International Applied Mechanics. 2003. T. 39. № 8. – C. 945–952.
11. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – T. 39. № 8. – C. 945–952.
12. Старовойтов Э.И., Доровская Е.П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. С. 45–50.
13. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. С. 45–50.
14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. С. 45–52.
15. Starovoitov E.I., Nagiyev F.B. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity. Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.

SUMMARY

The stability of the compressed rod under unevenly distributed load-Universe. The analytical solution and numerical results for the two types of boundary conditions. It is shown that the amendments to the known solution of up to 24%. Keywords: sustainability, the uneven distribution of the load, the task Yasinskiy.

Поступила в редакцию 01.11.2014