

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ВАЛА

д.т.н. <sup>1</sup>Омаров Т.И., к.п.н. <sup>1</sup>Гончарова И.А., <sup>2</sup>Сибилькова Н.П.,  
студ. <sup>2</sup>Алпысбаева Б.М.

<sup>1</sup>Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы

<sup>2</sup>Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ МЭИ» в г. Смоленске, Россия

В приводах исполнительных механизмов всех машинных агрегатов для передачи усилия от энергоносителя к рабочему органу машин используются трансмиссионные валы, зубчатые колеса, муфты, гибкие звенья (цепи, ремни). В процессе эксплуатации машины из-за податливости материала, из которого изготовлены несущие элементы, в них формируется упругая деформация кручения, способствующая возникновению и росту моментов сил упругости. Доминирующая составляющая моментов сил упругости будет формироваться в трансмиссионных валах привода. Для динамического исследования подобных механических систем необходимо определить численные значения некоторых параметров, важнейшим из которых является крутильная жесткость упругого элемента (вала). Трансмиссионные валы механизмов передвижения мобильных машин, как правило, имеют ступенчатую конфигурацию, что значительно усложняет задачу определения численного значения крутильной жесткости валов. Для вала, имеющего два участка с различными диаметрами, эквивалентная крутильная жесткость определяется как для последовательно соединенных упругих элементов с жесткостями  $C_1$  и  $C_2$  (рисунок 1) по формуле [1]

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

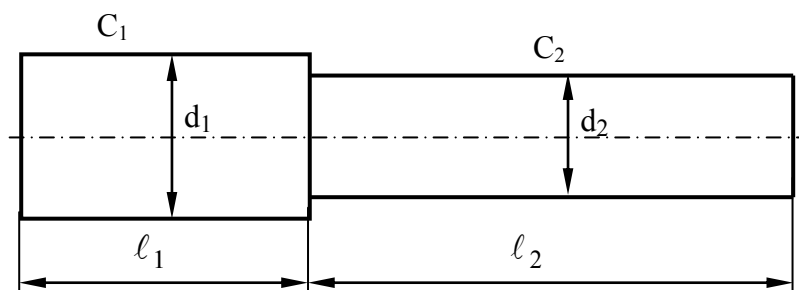


Рисунок 1 – последовательное соединение упругих элементов

При наличии более чем двух участков вала для определения эквивалентной крутильной жесткости удобно воспользоваться величиной, обратной жесткости, называемой податливостью  $e = \frac{1}{C}$ . При последовательном соединении упругих элементов (рисунок 2,а) их податливости складываются [2]. Ступенчатый вал можно рассматривать как последовательно соединенные дискретные тела с соответствующими диаметрами и длинами. Податливость такого вала определяется суммированием податливостей  $e$  участков вала:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad \text{или} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \quad (1)$$

По формуле (2) сначала определяется жесткость каждого участка вала, затем вычисляется эквивалентная крутильная жесткость всего вала. В таких случаях бывает

целесообразно ступенчатый вал (рисунок 2,а) заменить гладким валом эквивалентной жесткости (рисунок 2, б). При этом изменится общая длина вала, которая теперь будет называться приведенной длиной  $\ell$ . Диаметр гладкого вала постоянный по всей длине будет называться приведенным диаметром  $d$ . Диаметр и длина вала – основные геометрические размеры вала для определения численного значения крутильной жесткости.

Приведенный диаметр вала можно определить по формуле

$$d = \frac{d_1 \ell_1 + d_2 \ell_2 + d_3 \ell_3 + d_4 \ell_4}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4}. \quad (2)$$

Но без ущерба для расчета за приведенный можно принять диаметр любого из участков вала, желательно наибольшего размера.

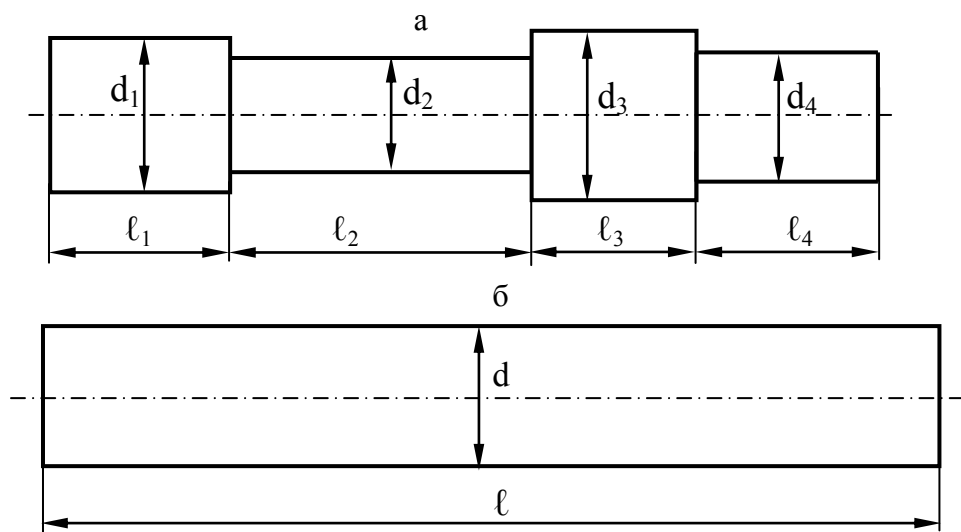


Рисунок 2 – Реальный (а) и приведенный (б) валы

Крутильная жесткость каждого участка вала

$$C_i = \frac{\pi G d_i^4}{32 \ell_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$\frac{32\ell}{\pi G d^4} = \frac{32\ell_1}{\pi G d_1^4} + \frac{32\ell_2}{\pi G d_2^4} + \frac{32\ell_3}{\pi G d_3^4} + \frac{32\ell_4}{\pi G d_4^4}. \quad (3)$$

Здесь  $\ell$  - приведенная длина вала,  $d$  – приведенный диаметр вала.

Таким образом, используя уравнение (3), получим формулу для определения приведенной длины вала:

$$\ell = \ell_1 \left( \frac{d}{d_1} \right)^4 + \ell_2 \left( \frac{d}{d_2} \right)^4 + \ell_3 \left( \frac{d}{d_3} \right)^4 + \ell_4 \left( \frac{d}{d_4} \right)^4. \quad (4)$$

В эксплуатационной практике очень часто для уменьшения веса детали применяют полые валы (рисунок 3). Как показывают расчеты, продольное отверстие внутри вала очень незначительно влияет на прочностные характеристики детали, поскольку максимальные касательные напряжения возникают на периферии диаметра вала.

Приведенная длина четырехступенчатого полого вала определяется по формуле [1]

$$\ell = \ell_1 \frac{d^4}{d_1^4 - d_0^4} + \ell_2 \frac{d^4}{d_2^4 - d_0^4} + \ell_3 \frac{d^4}{d_3^4 - d_0^4} + \ell_4 \frac{d^4}{d_4^4 - d_0^4},$$

где  $d$  – диаметр приведенного вала,  $d_0$  – внутренний диаметр полого вала.

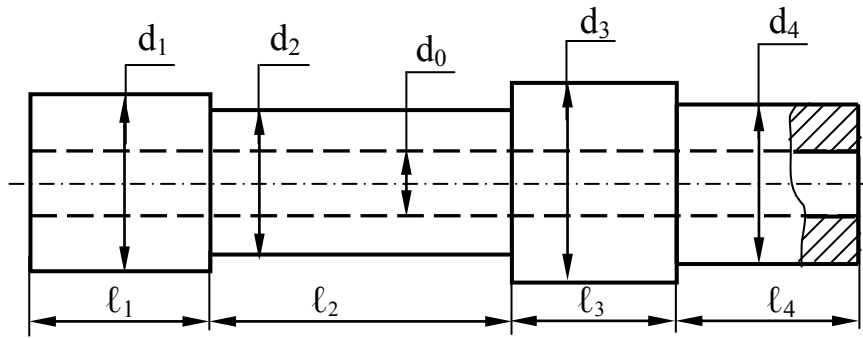


Рисунок 3 – Ступенчатый полый вал

Определим для примера используя формулы (2) и (4) приведенную длину и приведенный диаметр ведущего вала привода механизма передвижения рельсовой грузоподъемной машины [3] (рисунок 3). Вал имеет четыре ступени. Первый самый длинный участок вала (рисунок 3), фрагменты которого соединены с помощью зубчатых муфт принимается как одно тело.

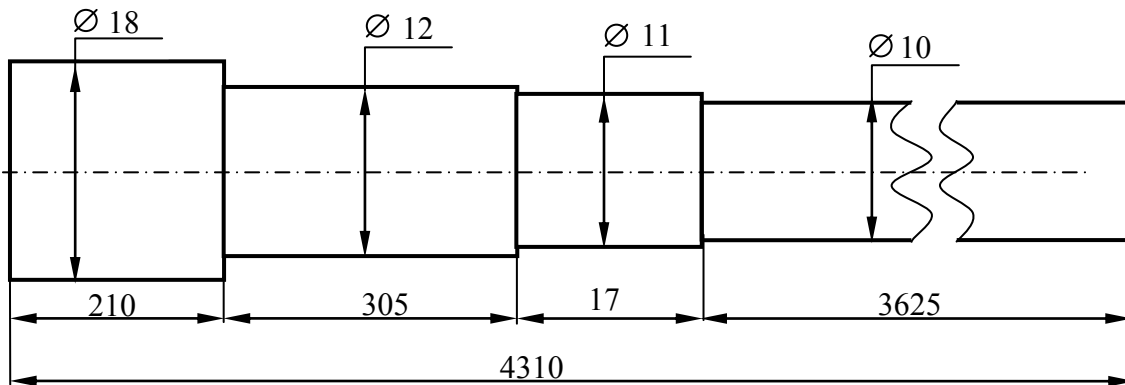


Рисунок 4 - Эскиз ведущего вала привода механизма передвижения рельсовой грузоподъемной машины

Геометрические размеры ступенчатого вала [4]: диаметры  $d_1 = 105$  мм,  $d_2 = 110$  мм,  $d_3 = 120$  мм,  $d_4 = 185$  мм; длины участков  $l_1 = 3625$  мм,  $l_2 = 170$  мм,  $l_3 = 305$  мм,  $l_4 = 210$  мм. Приведенный диаметр ведущего вала  $d$

$$d = \frac{105 \cdot 3625 + 110 \cdot 170 + 120 \cdot 305 + 185 \cdot 210}{3625 + 170 + 305 + 210} = 110 \text{ мм}$$

Приведенная длина ступенчатого вала  $\ell$

$$\ell = 3625 \left( \frac{110}{105} \right)^4 + 170 \left( \frac{110}{110} \right)^4 + 305 \left( \frac{110}{120} \right)^4 + 210 \left( \frac{110}{185} \right)^4 = 4778 \text{ мм}$$

В рассматриваемом примере приведенная длина оказалась больше реальной длины ведущего вала привода механизма передвижения машины [3]. За приведенный диаметр можно, в сущности, принять диаметр любой ступени вала, что несколько облегчит вычисление значения приведенной длины вала.

Используя значения приведенной длины и приведенного диаметра, определим крутильную жесткость ведущего вала исследуемого механизма:

$$c_1 = \frac{G \pi d^4}{32 \ell} = \frac{8,1 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 110^4}{32 \cdot 4778} = 2,42 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм},$$

$$\text{или } c_1 = 2,42 \cdot 10^5 \text{ Нм}.$$

Здесь  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа – модуль сдвига.

Жесткости валов и при кручении, и при растяжении и изгибе также удобно определять, используя такие параметры, как приведенная длина вала и приведенный диаметр вала.

Аналогичные формулы можно получить для невесомого ступенчатого стержня, работающего на растяжение (сжатие). Приведенный диаметр определяется по формуле (1). Обозначим площади поперечных сечений ступеней стержня  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ . Податливость ступенчатого стержня при растяжении (сжатии)

$$e = \frac{\ell}{EA} = \frac{\ell_1}{EA_1} + \frac{\ell_2}{EA_2} + \dots + \frac{\ell_k}{EA_k} + \dots + \frac{\ell_n}{EA_n}, \text{ а его приведенная длина}$$
$$\ell = \frac{\ell}{EA} = \ell_1 \frac{A}{A_1} + \ell_2 \frac{A}{A_2} + \dots + \ell_k \frac{A}{A_k} + \dots + \ell_n \frac{A}{A_n}.$$

Здесь  $E$  – модуль упругости при растяжении (модуль Юнга).

Таким образом, используя такие понятия, как приведенная длина вала и приведенный диаметр вала можно значительно упростить вычисление параметров для составления динамической модели исследуемого объекта.

### РЕЗЮМЕ

Трансмиссионные валы приводов механизмов машин, как правило, имеют ступенчатую конфигурацию, что значительно усложняет задачу определения численного значения крутильной жесткости. В таких случаях бывает целесообразно ступенчатый вал заменить гладким валом эквивалентной жесткости из условия равенства потенциальных энергий приводимой и приведенной систем. При этом изменится общая длина вала, которая теперь будет называться приведенной длиной. Диаметр гладкого вала с постоянным по всей длине поперечным сечением будет приведенным диаметром. Диаметр и длина – основные геометрические размеры вала для определения значения крутильной жесткости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – Киев: Наукова думка, 1996. – 288 с.
2. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – Киев: Наукова думка, 1981. – 160 с.
3. Омаров Т.И. Динамика механизмов переменной структуры рельсовых машин – Алм-Ата, КазНТУ, 2014. – 231с.
4. Техническая документация напольной завалочной машины мартеновского цеха грузоподъемностью 15 тонн / Завод «Криворожсталь». – Кривой Рог, 1983.

### SUMMARY

*Machines transmission shafts drives tend to have a stepped configuration, which greatly complicates the task of determining the numerical values of torsional stiffness. In such cases it is advisable to replace the stepped shaft for smooth shaft with equivalent stiffness observing conditions of equality of potential energies of the driven and the present systems. In this case change the overall length of the shaft, which will now be called the reduced length.*

**E-mail:** [omarov\\_tim@list.ru](mailto:omarov_tim@list.ru)  
[GoncharovaInna@russia.ru](mailto:GoncharovaInna@russia.ru)  
[sibilkova@mail.ru](mailto:sibilkova@mail.ru)

Поступила в редакцию 01.11.2014