УДК 532.516

УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

к.ф.-м.н. **Конон П.Н.,** маг. **Жук А.В.**

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. В различных отраслях промышленности широко применение процессы, использующие движение слоя жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Например, при центробежном литье металла определение скорости вращения формы является одним из основных вопросов при разработке технологии литья и конструировании центробежных машин. Поэтому актуальность рассматриваемой проблемы не вызывает сомнений. Вместе с тем задача движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра имеет и свое классическое значение. Она относится к классу задач с неизвестной границей области со сложной геометрией течения, а при ее решении необходимо использовать криволинейные цилиндрические координаты.

Изучение нестационарного движения в рассматриваемой проблеме имеет большое практическое значение. Кроме того, получение уравнений эволюции слоя жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра и исследование их решений представляет большой научный интерес, поскольку данная краевая задача достаточно сложна ввиду ее нелинейности и сложной области течения с неизвестной границей. Ей посвящено достаточно большое количество работ различных авторов, однако вопрос о решении задачи для слоя конечной немалой толщины при умеренных и больших числах Рейнольдса до сих пор был открытым.

Нестационарное движение плоского слоя вязкой жидкости на внешней и внутренней поверхности вращающегося цилиндра рассмотрено в работах [2,3]. Х. Моффатом было получено уравнение движения тонкой пленки в поле силы тяжести без учета капиллярных сил при умеренных числах Рейнольдса. В.В. Пухначевым при выводе уравнения свободной поверхности учтено влияние поверхностного натяжения. Авторами этих работ не рассматривался случай достаточно быстрого вращения цилиндра, не проводился подробный численный анализ и количественное сравнение с экспериментами. Исследования в более поздних работах посвящены в основном анализу этих уравнений. В [4] исследовано возмущенное движение слоя на внешней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле сил инерции. Это значит, что движения нетонких конечных слоев на внутренней поверхности цилиндра при достаточно быстром его вращении с учетом инерционных сил требуют дальнейшего детального изучения. Именно такие течения реализуются при центробежном литье в металлургии.

Постановка задачи и вывод уравнений эволюции. Исследуется плоское движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции. Плоское течение вязкой жидкости в слое удобно рассматривать в относительной полярной системе координат O, η, φ, жестко связанной с вращающимся цилиндром, а вместо трансверсальной составляющей скорости w использовать относительную угловую скорость слоя $\omega(\eta,\varphi,\tau)=w/\eta-1$. Движение описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. Они дополняются граничными условиями прилипания к твердой поверхности цилиндра $\eta=1$, отсутствием вязкого взаимодействия с окружающей средой и непрерывностью нормальных напряжений на свободной поверхности

$\eta=h(\varphi,\tau)$, условием периодичности течения по угловой координате, а также начальными условиями [5]. Начально-краевая задача содержит три безразмерных параметра – числа Рейнольдса, Фруда и Вебера: $Re = R_0^2\, \omega_0/\nu$, $Fr = R_0\omega_0^2/g$, $We = \rho R_0^3\, \omega_0^2/\sigma$, в которых R_0– радиус цилиндра, ω_0 – угловая скорость его вращения, ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, g – ускорение силы тяжести, ζ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В случае быстрого вращения характерные параметры задачи числа Рейнольдса, Фруда и Вебера значительно больше единицы, а радиальная составляющая скорости много меньше трансверсальной. Это дало возможность в из системы уравнений движения вязкой жидкости получить уравнения первого приближения, подобные уравнениям пограничного слоя. Решения полученных уравнений отыскивались прямым методом с учетом граничных условий прилипания на поверхности цилиндра и отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности. В итоге в [5,6] с помощью интегрального метода путем дальнейших длительных преобразований впервые получены уравнения эволюции конечного, не обязательно тонкого слоя при умеренном и достаточно быстром вращении цилиндрической оболочки с учетом сил инерции. Они записаны для толщины слоя $\delta(\varphi,\tau)=1-h(\varphi,\tau)$ и неизвестной величины $T(\varphi,\tau)$, входящей в формулу для относительной угловой скорости при удовлетворении граничных условий задачи:

$$\omega(\zeta,\varphi,\tau)=-T(\varphi,\tau)\zeta(1-\frac{1}{2}\zeta)\ ,\zeta=\frac{1-\eta}{\delta(\varphi,\tau)},\quad 0\le\zeta\le 1. \qquad (1)$$

Уравнения эволюции слоя представляются следующей системой:

$$\delta_\tau = H(\delta)T_\varphi + R(\delta,T)\delta_\varphi, \qquad (2)$$

$$T_\tau = U(\delta,T)\delta_\varphi + V(\delta,T)T_\varphi + \frac{1}{We}\frac{60}{(1-\delta)^4 E_0(\delta)}\Big(6\delta_\varphi{}^3 + 6(1-\delta)\delta_\varphi\delta_{\varphi\varphi} +$$

$$+(1-\delta)^2(\delta_\varphi+\delta_{\varphi\varphi\varphi})\Big) + \frac{1}{Fr}\frac{30(\delta-2)\cos(\varphi+\tau)}{E_0(\delta)} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{10T}{\delta^2 E_0(\delta)}(6+3\delta-\delta^2), \qquad (3)$$

где

$$H(\delta)=\frac{\delta(5\delta-8)}{24(\delta-1)},\quad R(\delta,T)=\frac{T(5\delta-4)}{12(\delta-1)};$$

$$U(\delta,T)=T^2U_2(\delta)+TU_1(\delta)+U_0(\delta);\quad V(\delta,T)=TV_1(\delta)+V_0(\delta);$$

$$U_2(\delta)=\frac{1}{\delta E_0(\delta)}\left(\frac{1}{42}(-336+553\delta-38\delta^2)+\frac{5\delta-4}{12(\delta-1)}(20-50\delta+27\delta^2)\right);$$

$$U_1(\delta)=\frac{40-50\delta}{E_0(\delta)};\quad U_0(\delta)=\frac{60(\delta-1)}{E_0(\delta)};$$

$$V_1(\delta)=\frac{1}{E_0(\delta)}\left(\frac{1}{21}(-336+161\delta+34\delta^2)+\frac{5\delta-8}{24(\delta-1)}(20-50\delta+27\delta^2)\right);$$

$$V_0(\delta)=\frac{\delta(40-25\delta)}{E_0(\delta)};\quad E_0(\delta)=-20+25\delta-9\delta^2.$$

В уравнениях (2), (3) нижний индекс обозначает соответствующую частную производную.

Уравнения эволюции (2),(3) дополняются условиями периодичности по угловой координате, а также периодическими начальными условиями

$$\delta(\varphi,\tau)=\delta(\varphi+2\pi,\tau),\quad \delta_{\varphi}(\varphi,\tau)=\delta_{\varphi}(\varphi+2\pi,\tau),$$
$$\delta_{\varphi\varphi}(\varphi,\tau)=\delta_{\varphi\varphi}(\varphi+2\pi,\tau),\qquad T(\varphi,\tau)=T(\varphi+2\pi,\tau); \tag{4}$$

$$\delta(\varphi,0)=\delta_0(\varphi),\quad T(\varphi,0)=T_0(\varphi). \tag{5}$$

Система нелинейных уравнений (2), (3) в частных производных с граничными и начальными условиями (4), (5) является замкнутой и служит для определения эволюции свободной поверхности слоя $\delta(\varphi,\tau)$. Первое уравнение системы непосредственно получено из уравнения свободной поверхности, а второе – интегральным методом. В правой части последнего уравнения первые два слагаемые учитывают влияния инерционных сил, третье слагаемое –вклад сил поверхностного натяжения, четвертое –влияние сил тяжести, а последнее – вязких сил.

Для вязкого слоя, стекающего по наклонной поверхности, для его расхода и толщины получены уравнения В.Я. Шкадовым [1], развившем теорию волновых течений академика П.Л. Капицы. В литературе они носят название уравнений Капицы–Шкадова. Уравнения (2), (3), полученные в данной работе, являются новыми в гидромеханике волновых течений и могут быть названы уравнениями типа Капицы–Шкадова для возмущенного жидкого слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле центробежных сил.

Сопоставление с известными уравнениями. Впервые уравнение движения тонкой пленки жидкости на поверхности цилиндра в поле силы тяжести при достаточно медленном его вращении без учета капиллярных сил при $We^{-1}<<(Fr^{-1}\,\mathrm{Re})^{1/2}$ получено Х. Моффатом [2]. В рассматриваемой относительной системе координат $O,\eta,\varphi,\tau,$ жестко связанной с поверхностью вращающегося цилиндра, оно примет следующий вид:

$$\delta_{\tau}=\frac{1}{3}\mathrm{Re}\,Fr^{-1}(\delta^3\cos(\varphi+\tau))_{\varphi}, \tag{6}$$

причем должны выполняться условия: $\mathrm{Re}\,\delta_S{}^2<<1,\quad \delta_S<<1$.Здесь δ_S – средняя толщина слоя.

Впоследствии В.В. Пухначевым [3] было рассмотрено влияние сил поверхностного натяжения и получено следующее эволюции тонкого слоя:

$$\delta_{\tau}=\frac{1}{3}\mathrm{Re}\,Fr^{-1}(\delta^3\cos(\varphi+\tau))_{\varphi}-\frac{1}{3}\mathrm{Re}\,We^{-1}(\delta^3\cdot(\delta_{\varphi}+\delta_{\varphi\varphi\varphi}))_{\varphi},\quad \delta<<1. \tag{7}$$

К уравнениям (6), (7) необходимо добавить начальные условия и требование периодичности по углу φ. При выводе этих уравнений влиянием силы инерции на движение жидкости пренебрегалось. Исследование решений этих уравнений проводился рядом зарубежных ученых.

В отличие от уравнений (6), (7) система (2), (3) описывает движение плоского слоя вязкой жидкости не обязательно малой толщины с учетом всех значимых физических факторов при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} >> 1$, то есть когда влияние сил инерции существенно.

Важно отметить, что условия, при которых получены уравнения (6), (7) и система (2), (3), не являются противоречивыми. Если средняя толщина пленки δ_S известна, то можно найти область значений числа Re, имеющую вид $1 << \mathrm{Re} << \delta_S^{-2}$, $\delta_S << 1$, которая удовлетворяет всем рассматриваемым условиям. Например, если $\delta_S = 0{,}02$, то должно быть $1 << \mathrm{Re} << 2500$, и в качестве общего для всех уравнений интервала можно выбрать значения $10 < \mathrm{Re} < 250$. Следовательно, можно поставить вопрос о совместимости решений системы (2), (3) и уравнений (6), (7) в определенной общей области значений чисел Re.

Система (2), (3) в случае тонкой пленки жидкости ($\delta << 1$), при пренебрежении инерционными членами уравнений Навье-Стокса и выполнении неравенства $\mathrm{Re}\,\delta_S^{\,2} << 1$, примет вид

$$\begin{gathered} \delta_\tau = \frac{1}{3}(T\delta)_\varphi, \\ -\frac{1}{We}(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}) + \frac{\cos(\varphi+\tau)}{Fr} - \frac{T}{\mathrm{Re}\,\delta^2} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Второе уравнение системы (8) служит для определения величины $T(\varphi,\tau)$:

$$T = \mathrm{Re}\,Fr^{-1}\delta^2\cos(\varphi+\tau) - \mathrm{Re}\,We^{-1}\delta^2(\delta_\varphi + \delta_{\varphi\varphi\varphi}). \tag{9}$$

При таком значении $T(\varphi,\tau)$ окружная компонента скорости $w(\varphi,\tau)$ совпадает со значением этой величины в работе [3], а первое уравнение системы (2.40) – с уравнением (2.39), описывающим эволюцию тонкой пленки при медленном вращении цилиндра. Следовательно, в рассматриваемой области $1 << \mathrm{Re} << \delta_S^{-2}$, $\delta_S << 1$, то есть при определенных угловых скоростях вращения цилиндра, из системы (2.34), (2.35) можно вывести уравнения (2.38), (2.39), полученные Х. Моффатом и В.В. Пухначевым [2,3].

Таким образом, получена новая более общая система уравнений эволюции с учетом инерционных сил для слоев конечной толщины, позволяющая исследовать различные практические задачи, связанные с рассматриваемым течением, например, гидродинамические процессы центробежного литья.

Результаты численных расчетов. Исследования полученной системы уравнений проводятся численно комбинацией метода прямых и Рунге – Кутта четвертого порядка точности с учетом условия периодичности по угловой координате[4-6]. Точность вычислений контролировалась условием постоянства массы на цилиндре во все время движения.

Проследим за эволюцией формы свободной поверхности слоя, первоначально имеющего постоянную толщину δ_0 = const. Численное решение задачи проводилось при следующих данных: жидкость – водные растворы глицерина с плотностью 1260 кг/м^3 , кинематической вязкостью 1,11 10^{-3} м^2/сек, коэффициентом поверхностного натяжения 0,07 н/м при температуре 20° С. Радиусы цилиндра были равны 2,5; 3,5 см, а угловые скоростиего вращения варьировались от 0,5 до 5 оборотов в секунду.Результаты исследований и подробные комментарии приведены на рисунках 1-3.

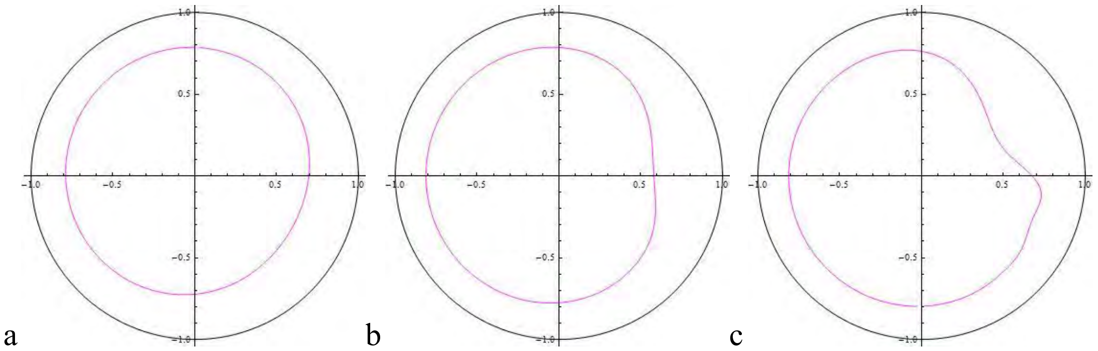

Рисунок 1 – Формы свободной поверхности слоя жидкости при $\delta_0 = 0{,}25$, $Re = 12{,}38$, $Fr = 1{,}23$, $We = 136$ в моменты времени а - $\tau = \pi/2$, b - $\tau = \pi$, c - $\tau = 3\pi/2$

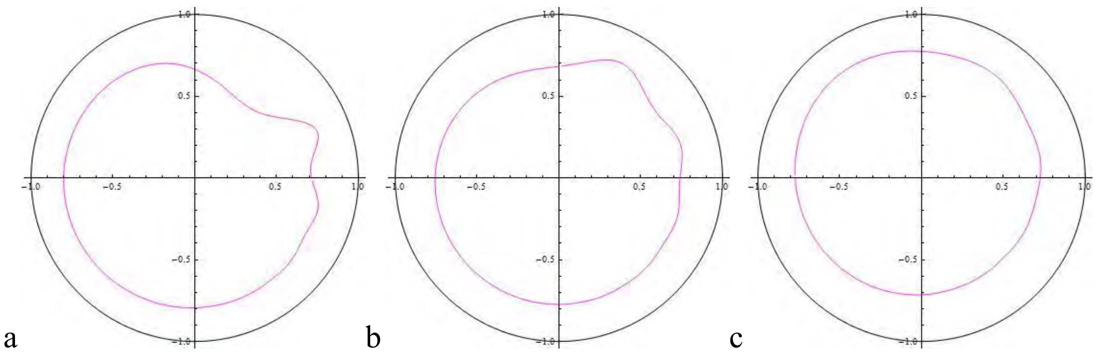

Рисунок 2 – Формы свободной поверхности слоя жидкости при $\delta_0 = 0{,}25$, $Re = 12{,}38$, $Fr = 1{,}23$, $We = 136$ в моменты времени a- $\tau = 2\pi$, b- $\tau = 5\pi/2$, c- $\tau = 3\pi$

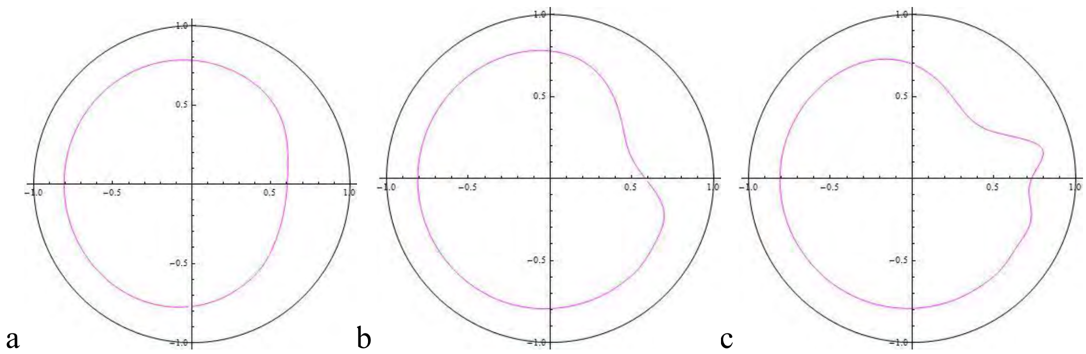

Рисунок 3 – Формы свободной поверхности слоя вязкой жидкости при $\delta_0 = 0.25$, $Re = 12{,}38$, $Fr = 1{,}23$, $We = 136$ в моменты времени а - $\tau = 7\pi/2$, b - $\tau = 4\pi$, c - $\tau = 9\pi/2$

Вначале при $\tau = \pi/2$ наиболее явно проявляется влияние силы тяжести, когда толщина слоя больше на нижней части цилиндра. Вращение цилиндра против часовой стрелки способствует увеличению массы жидкости в левой части цилиндра при подъеме слоя и уменьшении в правой вследствие ускоренного его движения. Это явление характерно для любого момента времени. Затем сила инерции поднимает собравшуюся жидкость при $\tau = \pi$. В момент $\tau = 3\pi/2$ можно видеть, что сила инерции продолжает вращать собравшийся объѐм жидкости против часовой стрелки, а также возникает провисание жидкости из-за влияния силы тяжести. Для $\tau = 2\pi$ характерно наибольшее развитие возмущений с появлением трех экстремумов вследствие нелинейного взаимодействия возмущений. В дальнейшем можно наблюдать, что развитие возмущений и подъѐм значительного количества жидкости к верхней части цилиндра сменяется затуханием возмущений. Сила инерции стягивает жидкость с верхней части цилиндра, как показано на рисунке 2 в моменты времени $\tau = 5\pi/2$ и $\tau = 3\pi$. Затем наблюдается примерное повторение процесса с определенным периодом, а именно, сила инерции поднимает часть жидкости, появляются возмущения, вызванные силой тяжести, сила инерции перебрасывает часть жидкости с верхней части цилиндра, и возмущения затухают.

Отметим, что форма свободной поверхности при больших угловых скоростях может оставаться невозмущѐнной и вращаться с цилиндром как единое целое, что необходимо при центробежном литье в металлургии.

Заключение. В результате исследований получена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах *Re* с учетом сил инерции. При пренебрежении инерционными членами из полученной системы выводится уравнение, полученное в [3] для тонкой пленки. Разработан численно-аналитический метод и решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя при $Re >> 1$.

РЕЗЮМЕ

Получена система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя конечной толщины при умеренных и больших числах *Re* с учетом сил инерции. Они могут быть названы уравнениями типа Капицы–Шкадова для возмущенного жидкого слоя на внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки в поле центробежных сил. Показано, что при пренебрежении инерционными членами из полученной системы выводится уравнение Пухначева для тонкой пленки. Разработан численно-аналитический метод и решена нестационарная задача о движении плоского слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра. Учет нелинейного взаимодействия возмущений позволил проследить за механизмом эволюции поверхности слоя при $Re >> 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1968. – № 2. –С. 20-25.
2. Moffat H.K. Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder // Jornal de Mehanique. V. 16, № 8, 1977. P. 651-673.
3. Пухначев В.В. Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // ПМТФ.- 1977.- N 3.- С. 78-88.
4. Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра // ИФЖ.-1994.- Т.66, N 6. - С. 689-694.
5. Конон П.Н., Жук А.В. Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки // Механика машин, механизмов и материалов. Минск. - 2013.- №4 (25) – С. 32-37.
6. Шкадов В.Я., Конон П.Н., Жук А.В. Возмущенное движение слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра./ 5-ая Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения», Бийск, 2014, с. 110

SUMMARY

Plane motion of viscous layer of fluid in the gravity field, surface tension and inertia on inner surface of rotating with constant angular velocity cylinder is considered. Cylinder is located horisontally. System of partial differential equations was obtained for evolution of free surface of planar layer for large and moderate Reynolds numbers. Neglecting inertial terms we can get equation obtained by Puhnachev V.V. for thin film. Numerical method was developed and unsteady motion problem was solved.

E-mail: kononp@tut.by

Поступила в редакцию 02.11.2014