

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., к.т.н. Хвисевич В.М.

УО «Брестский государственный технический университет»

Создание конструктивных элементов механизмов и машин всегда основывается на снижении их материалоемкости при одновременном повышении прочности и жесткости. В реальных условиях эксплуатации эти элементы подвергаются воздействию температуры, механических усилий, имеют сложную геометрию области. Осуществить аналитическое решение задач теплопроводности и термоупругости в общем случае практически невозможно. Наиболее распространенными численными методами являются методы конечных и граничных элементов. С учетом некоторых преимуществ метода граничных элементов актуальным является вопрос развития и усовершенствования этого метода.

Немаловажным аспектом с позиции снижения материалоемкости элементов является учет неоднородности материала. В работе [1] на примере задачи о нагреве цилиндра показано, что напряжения, подсчитанные с учетом только изменения модуля упругости E от температуры на 40% меньше, чем напряжения при независимом от температуры модуле.

Неоднородность упругих свойств материалов может возникать в грунтах, процессах формирования тел, технологических процессах, при эксплуатации элементов с учетом влияния окружающей среды (воздействия температуры, радиации, активных жидкостей, газов и т.д.). С учетом характера зависимости упругих параметров среды (параметры Ламе) от координат выделяют три типа неоднородностей: непрерывная, кусочная, случайная.

Рассмотрим упругое, изотропное тело. При воздействии стационарного температурного поля модуль упругости E , коэффициент линейного расширения α являются функциями температуры T , коэффициент Пуассона $\nu = const$ (согласно [2] для многих материалов наблюдается независимость ν от температуры). Граница L плоской области D рассматриваемого тела может быть кусочно-гладкой, многосвязной. Для постановки краевой задачи термоупругости в перемещениях необходимы уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^T \alpha(T) dt \right) + \\ + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] = 0; i=1,2. \end{aligned} \quad (1)$$

где $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, $\theta = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$, δ_{ij} – символ Кронекера, и граничные условия

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_j = \frac{1+\nu}{E} q_i(x_S) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} n_i \int_0^T \alpha(T) dT. \quad (2)$$

Согласно Тростелю [3], введем малый параметр φ , определяемый функцией

$$E(T): \frac{1}{E} \left(\frac{dE}{dT} \right) = \frac{d}{dT} \left| \ln \frac{E}{E_0} \right| = \varphi A(T).$$

Учтем, что $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi \cdot A(T) \frac{\partial T}{\partial x_j} = \varphi \cdot B_j(x_s)$. Тогда с учетом этих соотношений уравнение (1) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^T \alpha(T) dt \right) + \\ + \varphi B_j \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся методом возмущений (границы применимости получаемых решений исследованы в [1]). Решение задачи будем разыскивать в виде степенного ряда по малому параметру φ

$$u_i = u_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k u_i^k. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и (3) получим краевую задачу для вектора u_i^0

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i^0 + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta^0}{\partial x_i} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^T \alpha(T) dt \right), \\ - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_i = \frac{1+\nu}{E} q_i(x_s) + \frac{1+\nu}{1-2\nu} n_i \int_0^T \alpha(T) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

а также последовательность краевых задач для векторов u_i^k , $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_i^k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta^k}{\partial x_i} = -B_j \left[\frac{\partial u_i^{k-1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{k-1}}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \theta^{-1} \delta_{ij} \right], \\ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right] n_j = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Напряжения определяются с помощью закона Гука.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{E(T)}{1+\nu} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^T \alpha(T) dt \delta_{ij} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_k^k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, краевая задача термоупругости неоднородного тела сводится к краевой задаче термоупругости и последовательности краевых задач теории упругости однородного тела.

Для решения задачи (5) сначала необходимо решить краевую задачу теплопроводности. Пусть коэффициент теплопроводности является функцией температуры, тогда уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \quad (8)$$

Используя функцию $T^* = \int_0^T \lambda(T) dT$, получим $\frac{\partial T^*}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$ и уравнение (8)

преобразуется в уравнение Лапласа для функции T^* . Если, например, коэффициент теплопроводности является линейной функцией температуры $\lambda = \lambda_0(1 - kT)$, получим соотношение:

$$T = \frac{1}{k} \left(1_0 - \sqrt{1 - 2k \frac{T^*}{\lambda_0}} \right), \quad (9)$$

где k - постоянный коэффициент, определяемый экспериментально.

Функцию T^* представим в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев:

$$T^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{dT^*(y)}{dn_y} \ln \frac{1}{r} - T^*(y) \frac{d}{dn_y} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] dl_y, \quad (10)$$

где r - расстояние между параметрической $x(x_1, x_2)$ и текущей $y(y_1, y_2)$ точками при интегрировании, $y \in L$, $\cos \varphi = n_i(y) \beta_i$, $\bar{n}(y)$ - вектор внешней нормали в точке y к контуру L , β_i - направляющие косинусы.

С учетом предельных значений всех слагаемых получаем интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности

$$\pi T(x_L) = \int_L \left[\frac{dT^*}{dn_y} \ln \frac{1}{r} + T^*(y) \frac{\cos \varphi}{r} \right] dl_y. \quad (11)$$

Здесь $\cos \varphi = n_i(y) \cdot \beta_i$; β_i - направляющие косинусы вектора \bar{r} .

Решение задачи (5) будем разыскивать в виде:

$$u_i^0 = u_i^u + u_i^T, \quad (12)$$

где u_i^0 - решение однородного уравнения, частное решение u_i^T представим в виде

$$u_i^T = \frac{\partial W}{\partial x_i}. \quad (13)$$

Вектору u_i соответствует тензор

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^u + \sigma_{ij}^T. \quad (14)$$

Краевую задачу термоупругости (5) сводим к задаче изотермической теории упругости, подставляя в граничные условия этой задачи решение (12) с учетом (13). Тогда на границе L рассматриваемой области будет действовать приведенная нагрузка

$$\bar{\rho}_{np} = \bar{\rho}_L + \bar{\rho}_T, \quad (15)$$

где $\bar{\rho}_T$ - фиктивная поверхностная температурная нагрузка ($\rho_i^T = -\sigma_{ij} \cdot n_j$), ρ_L - механическая нагрузка.

При подстановке (13) в уравнение равновесия (5) последнее удовлетворится, если

$$\Delta W = \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^T \alpha(T) dT. \quad (16)$$

Для многих материалов коэффициент α имеет зависимость

$$\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \gamma T), \quad (17)$$

где α_0 - значение коэффициента при исходном состоянии тела, γ - постоянная, определяемая из экспериментов.

С учетом (16) и (17)

$$\Delta W = abT - acT^*, \quad (18)$$

здесь $a = \alpha_0 \frac{1+\nu}{1-\nu}$, $b = 1 + \frac{\gamma}{k}$, $c = \frac{\gamma}{k\lambda_0}$.

Представляя T с помощью потенциалов, получаем:

$$\Delta W = -\frac{ab}{4\pi} \int_D T(y) \Delta \left(\ln \frac{1}{r} \right) dD_y - \frac{ac}{2\pi} \left\{ \int_L \left[\frac{dT(y)}{dn_y} \Delta W^* - T(y) \Delta \left(\frac{\partial W^*}{\partial n} \right) \right] dl_y, \text{ где} \right.$$

$W^* = \frac{r^2}{4} (1 - \ln r)$ – фундаментальное решение Лауричелла для плоской области.

Тогда

$$W = \frac{ab}{2\pi} \int_D T(y) \ln \frac{1}{r} dD_y - \frac{ac}{2\pi} \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} \left[\frac{r^2}{4} (1 - \ln r) - T(y) \left[\frac{r}{4} \cos \varphi (1 - 2 \ln r) \right] \right] \right\} dl_y, \quad (19)$$

Если (12) подставить в уравнения Дюамеля-Неймана, то

$$\sigma_{ij}^T = \frac{E(T)}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta W \sigma_{ij} \right) \text{ и с учетом (19) получим интегральное представление}$$

добавок температурных напряжений

$$\sigma_{ij}^T(x) = -\frac{aE(T)}{2(1+\nu)} \left\langle \frac{b}{\pi} \left[2\pi T(x) \delta_{ij} + \int_D T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dD_y \right] + \right. \\ \left. + c \int_L \left\{ \frac{dT(y)}{dn_y} r \beta_i (2 \ln r - 1) - T(y) [2\beta_i \cos \varphi + n_i(y) (2 \ln r - 1)] \right\} dl_y \right\rangle. \quad (20)$$

В контурных точках формулы напряжений примут вид:

$$\sigma_{ij}^T(x_L) = -\frac{aE}{2(1+\nu)} \left\{ bT(x_L) [n_i(x_L) n_j(x_L) + 2\delta_{ij}] + \right. \\ \left. + cT(x_L) n_i(x_L) n_j(x_L) + \frac{b}{\pi} \int_D T(y) \frac{2\beta_i \beta_j - \delta_{ij}}{r^2} dD_y + \nu.p.\sigma_{ij}^L(x), \right. \quad (21)$$

где $\nu.p.$ - главное значение второго интеграла в (21).

Интегральное представление напряжений $\sigma_{ij}^u(x)$ имеется, например, в [4] и оно построено на основе фундаментального решения плоской теории упругости.

Систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) можно получить, подставляя интегральное выражение для (14) в граничные условия задачи, т.е.

$$v_i(x_L) + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \int_L v_i(y) \cos \psi [(1-2\nu) + 2\beta_i^2] + \\ + v_j(y) \left\{ (1-2\nu) [n_j(x_L) \beta_i - n_i(x_L) \beta_j] + 2\beta_i \beta_j \cos \psi \right\} \left\langle \frac{dl_y}{r(x,y)} = p_{np}(x_L), \right. \quad (22)$$

где $\cos \psi = n_i(x) \beta_j$.

Интегральные уравнения (20), (21), (22) с учетом (15) дают решение плоской краевой задачи термоупругости.

Напряжения, найденные в результате решения этой задачи, используются на последующем шаге метода возмущений. Решение k -й краевой задачи будем разыскивать в виде:

$$u_i^k = u_i^u + u_i^N, \quad (23)$$

где u_i^N - частное решение неоднородного дифференциального уравнения, которое с помощью фундаментального решения плоской теории упругости запишется в виде:

$$u_i^N = -2(1-\nu) \int_D \left(\frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_p} \sigma_{jp}^{(0)} \right) \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + \beta_i \beta_j \right] \frac{1}{E(T)} dD. \quad (24)$$

Тензор напряжений на первом приближении:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^U + \sigma_{ij}^N, \quad (25)$$

где σ_{ij}^U приводится в [4], σ_{ij}^N - компоненты добавок напряжений, обусловленные неоднородностью материала.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^N(x) = & -\frac{(1+\nu)E(T)}{2\pi(1-\nu)} \int_D \rho_k^p(y) \frac{dE}{dT} \cdot \left\langle \frac{1}{r} [(1-2\nu) \cdot (\delta_{ik}\beta_{jk} + \delta_{jk}\beta_{ki} - \delta_{ij}\beta_k) + \right. \\ & \left. 2\beta_i\beta_j\beta_k] - \frac{1}{2E^2} \frac{dE}{dT} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{jk} + \beta_j\beta_k \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial T}{\partial x_j} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} + \beta_i\beta_k \right] + \delta_{ij} \sum_{m=1}^2 \frac{\partial T}{\partial x_m} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{mk} + \beta_m\beta_k \right] \right] \right\rangle dD_y, \end{aligned} \quad (26)$$

здесь $\rho_1^p = \frac{\partial T}{\partial x_1} \sigma_{11}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \sigma_{12}^{(0)}$; $\rho_2^p = \frac{\partial T}{\partial x_1} \sigma_{21}^{(0)} + \frac{\partial T}{\partial x_2} \sigma_{22}^{(0)}$.

Зная $\sigma_{ij}^N(x)$, определяем фиктивную нагрузку p_i^N :

$$p_i^N = -\sigma_{ij}^N(x) \cdot n_j, \quad (27)$$

которая подставляется в систему СИУ (22), вместо p_{np} .

Решая (22), находим плотность потенциала $v_i(y)$, после чего определяем перемещения $u_i^{(1)}(x)$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(1)}$. Процедура вычислений на следующих приближениях повторяется. Таким образом, полученные интегральные уравнения позволяют решить плоскую краевую задачу неоднородной термоупругости.

Для реализации интегральных уравнений на ПЭВМ разработан соответствующий алгоритм. На первом этапе нулевого приближения реализуется краевая задача теплопроводности (11) и вычисляются температурные добавки перемещений u_i^T и напряжений σ_{ij}^T и фиктивная поверхностная нагрузка.

На первом этапе реализуется система СИУ (22), в результате решения которой определяется плотность потенциала $v_i(y)$, после чего вычисляются перемещения $u_i^{(0)}(x)$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$. На втором приближении вычисляются перемещения (24), напряжения (26) и фиктивная нагрузка $p_i^N(x)$. Далее процесс повторяется как и на предыдущем шаге. Для вычисления интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса и Лащенко.

Реализован тестовый пример (задача о нагреве толстостенного длинного цилиндра). Решение с достаточной степенью точности получено на втором приближении. На рисунке 1а показана зависимость радиальных и окружных напряжений (ζ_r^* , ζ_ν^*) от радиуса при постоянном модуле упругости $E=1$ и при модуле упругости, зависящем от температуры (ζ_r , ζ_ν):

$$E(T) = E_0 \cdot e^{-\beta T},$$

где $\beta = \chi = \ln(b/a)/T_a$, $b/a = 2$ - отношения радиусов, $T_a = 1$ - температура на внутреннем радиусе.

Значения коэффициентов линейного расширения и Пуассона были приняты $\alpha=1$, $\nu=0,3$.

Результаты численного решения по разработанному алгоритму (рисунок 1а) качественно совпадают с аналитическим решением, приведенным в [1] (рисунок 1б), которое учитывает и продольные напряжения ζ_z . Это говорит о достоверности разработанного алгоритма.

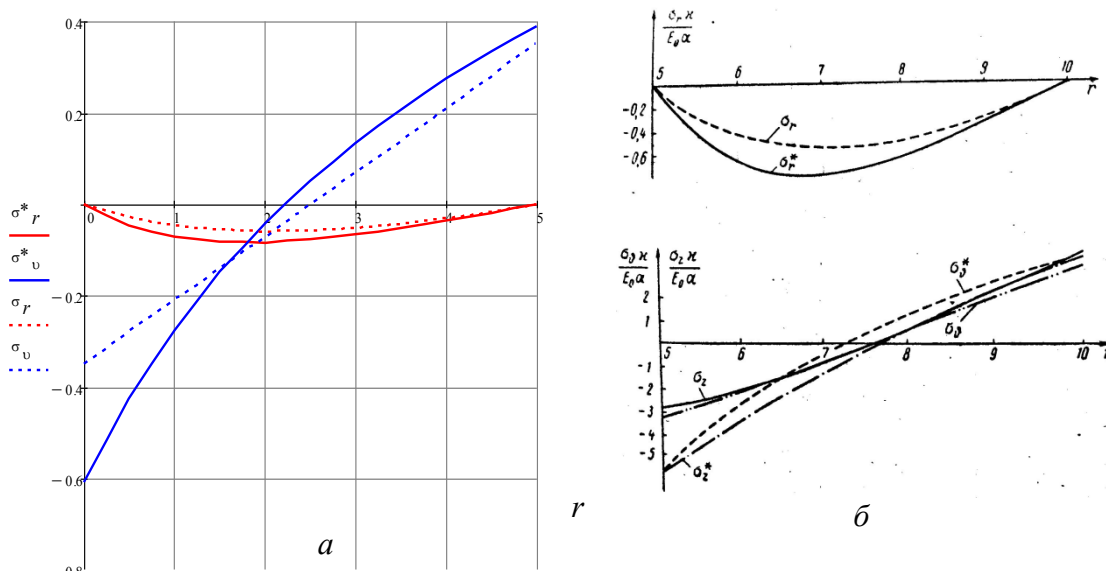


Рисунок 1 – Зависимость напряжений от радиуса
 а – численное решение по разработанному алгоритму; б – известное аналитическое решение.
 $\zeta_r, \zeta_\theta, \zeta_z$ – радиальные, окружные и продольные напряжения при переменном модуле упругости
 ζ^* – напряжения при постоянном модуле упругости

РЕЗЮМЕ

Построены интегральные уравнения плоской краевой задачи неоднородной термоупругости. Разработан алгоритм численного решения задачи. Составлена FORTRAN-программа и реализован тестовый пример. Достоверность алгоритма проверена путем сравнения полученных результатов с известным аналитическим решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел / А.В. Ломакин. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 361 С.
2. Писаренко, Г.С. Прочность материалов при высоких температурах / Г.С. Писаренко. – Киев: "Навукова думка", 1966. – 260 С.
3. Trostel, R. Statioäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stofwerten / R. Trostel. - Ingenieur - Archiv, 1958, №26.
4. Хвисевич, В.М. Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной теплопроводности методом потенциала / В.М. Хвисевич // Строительная механика и расчет сооружений, 1991. – №2. – С. 48 - 51.

SUMMARY

The integrated equations of a flat edge task of non-uniform thermo elasticity are constructed. The algorithm of the numerical solution of a task is developed. FORTRAN program is made and the test example is realized. Reliability of algorithm is checked by comparison of the received results with the known analytical decision.

E-mail: vai_mrtm@tut.by
vmhvisевич@bstu.by
tdl-tdl@rambler.ru

Поступила в редакцию 03.11.2014