*УДК 539.3*

# ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

к.ф.-м.н. **Акимов В.А.,** к.ф.-м.н. **Гончарова С.В.**

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Как известно [2], решение плоской задачи теории упругости сводится к нахождению функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению и статическим граничным условиям на поверхности тела.

Изложенный в [1] подход наводит на мысль впервые представить бигармоническую функцию напряжений в декартовой системе координат в операторно-символическом виде:

$$\varphi = \left[(A + By)\sin(yd_x) + (C + Dy)\cos(yd_x)\right] f(x), \qquad (1),$$

где $d_x = \partial/\partial x$; $A, B, C, D$ – операторные постоянные; $f(x)$-произвольная функция. Можно непосредственно убедиться, что введенная таким образом функция $\varphi(x, y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^2\nabla^2\varphi = 0$

$$(d_x^4 + 2d_x^2 d_y^2 + d_y^4)\varphi = 0 \text{, где } d_x = \partial/\partial x, \quad d_y = \partial/\partial x$$

Представим функцию $f(x)$ в виде тригонометрического ряда: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(E_n \sin\lambda_n x + F_n \cos\lambda_n x)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}\varphi = &\sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n} ch\lambda_n y + C_{2n} sh\lambda_n y + C_{3n} ch\lambda_n y + C_{4n} y sh\lambda_n y)\sin\lambda_n x + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(D_{1n} ch\lambda_n y + D_{2n} sh\lambda_n y + D_{3n} ch\lambda_n y + D_{4n} y sh\lambda_n y)\cos\lambda_n x\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь обозначено $CE_n = C_{1n}$, $AE_n = C_{2n}$, $DE_n = C_{3n}$, $BE_n = C_{4n}$, $CF_n = D_{1n}$, $AF_n = D_{2n}$, $DF_n = D_{3n}$, $CF_n = D_{4n}$.

Разложение (2) в ряды по синусам и косинусам совпадает с общеизвестным [2 (стр. 369)]. Это обстоятельство подтверждает правильность нового операторного представления (1).

Выражения для напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n}\lambda_n^2 ch^2\lambda_n y + C_{2n}\lambda_n^2 sh^2\lambda_n y + C_{3n}\lambda_n(2sh\lambda_n y + \lambda_n y ch\lambda_n y) + \\
&+ C_{4n}\lambda_n(2ch\lambda_n y + \lambda_n y sh\lambda_n y)]\sin\lambda_n x, \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n} ch\lambda_n y + C_{2n} sh\lambda_n y + C_{3n} y ch\lambda_n y + C_{4n} y sh\lambda_n y]\lambda_n^2 \sin\lambda_n x, \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{n=1}^{\infty}[C_{1n}\lambda_n ch\lambda_n y + C_{2n}\lambda_n ch\lambda_n y + C_{3n}(ch\lambda_n y + \lambda_n y sh\lambda_n y) + \\
&+ C_{4n}\lambda_n(sh\lambda_n y + \lambda_n y ch\lambda_n y)]\cos\lambda_n x.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (3) определяются из граничных условий на гранях балки.

Теперь будем представлять функцию напряжений в виде полиномов различных степеней, а тригонометрические функции будем разлагать в ряды Маклорена. Объемные силы будем полагать равными нулю.

Так как бигармоническое уравнение имеет четвертый порядок, то полиномы степени ниже четвертой тождественно удовлетворяют бигармоническому уравнению

$$(\partial x^4 + 2\partial x^2 \partial y^2 + \partial y^4)\varphi = 0,\ \text{где}\ \partial y = \partial / \partial y$$

Для полинома четвертой степени, запишем:

$$\varphi_4 = \left[ (A+By)(ydx - \frac{y^3 dx^3}{6}) + (C+Dy)(1 - \frac{y^2 dx^2}{2} + \frac{y^4 dx^4}{24}) \right](a_3 x^3 + a_4 x^4)$$

Проделав указанные операции, получим:

$$\varphi = (A+By)[y(3a_3x^2 + 4a_4x^3) - y^3(a_3 + 4a_4x)] + (C+Dy)[a_3x^3 + a_4x^4 -$$
$$-3y^2(a_3x + 2a_4x^2) + a_4y^4]$$

Выписывая однородный полином четвертой степени, и обозначая $Ca_4 = a_4/12$, $4Aa_4 = b_4/3$, $Da_3 = c_4/3$, $Ba_3 = d_4/6$, окончательно получим:

$$\varphi = \frac{a_4}{12}(x^3y - xy^3) + \frac{b_4}{3}(x^3y - xy^3) + \frac{c_4}{3}(x^3y - 3xy^3) + \frac{d_4}{6}(3x^2y^2 - y^4) \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться, что все слагаемые в формуле (4) удовлетворяют бигармоническому уравнению. Данное выражение можно записать в виде

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{12}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{c_4}{6}xy^3 + \frac{d_4}{4}\left(x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^4\right).$$

Здесь последние три слагаемых в точности совпадают с приведенными в [2], стр.354. А вот первое слагаемое значительно отличается от своего аналога, которое в [2] имеет вид $\frac{a_4}{12}(x^4 - y^4)$.

Как будет видно в дальнейшем, для более высоких степеней полиномов, все слагаемые будут новыми.

Повышая степени полиномов, можно получить решение задач для более сложных случаев нагруженных полос. Например, с помощью функции напряжений в виде полинома шестой степени решается задача об изгибе консоли нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. При нагрузке изменяющейся по квадратичному подходит полином седьмой степени. Поэтому, учитывая практическую важность отмеченных выше случаев, применим разработанный алгоритм для нахождения новых видов функций напряжений $\varphi_5$ ,$\varphi_6$, $\varphi_7$ . Выпишем их:

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{20}(y^5 + 5x^4y - 10x^2y^3) + \frac{b_5}{12}(x^3y^2 - xy^4) + \frac{c_5}{20}(x^5 + 5xy^4 - -10x^3y^2) +$$
$$\frac{d_5}{4}(y^5 - 6x^2y^3 + yx^4);$$

$$\varphi_6 = \frac{a_5}{30}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5) + \frac{b_6}{10}(5x^4y^2 - 10x^2y^4 + y^6) +$$
$$+\frac{c_5}{30}(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + \frac{d_5}{5}(x^5y - 10x^3y^3 + 5xy^5);$$

$$\varphi_7 = \frac{a_7}{42}(7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7) + \frac{b_7}{12}(6x^5y^2 - 20x^3y^4 + 6xy^3) + \frac{c_7}{42}(x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6) + \frac{d_7}{6}(x^6y - 15x^4y^3 + 15x^2y^5 - y^7).$$

Построенные новым способом полиномы отличаются от известных до сих пор, но все они тождественно удовлетворяют бигармоническому уравнению. Это обстоятельство позволяет получить новые решения плоских задач теории упругости. Принципиальных различий в них не будет, и скорее всего они будут носить сравнительный характер. При решении задач можно попытаться подобрать подходящую комбинацию из отдельных членов полиномов различных степеней. В некоторых случаях помогает учет условий симметрии или антисимметрии.

**РЕЗЮМЕ**

На основе операторного метода разработан алгоритм построения новых решений бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости. Приведены конкретные примеры построения бигармонических полиномов четвертой, пятой, шестой и седьмой степени.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Минск: УП «Технопринт», 2003. – 101 с.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости. Учебник под ред. Варданяна Г.С.. М., изд. АСВ, 1995. – 568 с.

**SUMMARY**

*On the basis of an operator method the algorithm of creation of new solutions of the biharmonic equation of a flat task of the theory of elasticity is developed. Concrete examples of creation of biharmonic polynoms of the fourth, fifth, sixth and seventh degree are given.*

**E-mail:** vakim50@mail.ru

Поступила в редакцию 29.10.2014