

АТТЕСТАЦИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

н.с. Гавриленко С.Л.

*ГНУ «Институт механики металлополимерных систем НАН Беларуси
им. В.А. Белого», Гомель*

Введение. При описании и моделировании процессов методами механики деформируемого твердого тела, кроме основополагающих знаний о деформационном поведении материала, необходимы также сведения о корректности и возможности применимости модели. В более широком смысле необходимы знания об алгоритме аттестации модели.

Для проведения моделирования, кроме знания математической постановки задачи, необходимы количественные оценки погрешности проведенных расчетов и истинности использованной модели материала. Для этого требуется определение параметров и материальных функций модели, устойчивости последних относительно начальных и граничных условий, оценка погрешности при приближенных значениях кинематических или силовых граничных условиях.

При математическом моделировании (аналитическом, численном) необходимо знание области применимости модели (характерные диапазоны скоростей деформации, деформации, температур и других механических параметров). Все это необходимо представить процедурой (алгоритмом) аттестации механико-математической модели, который включает идентификацию и верификацию.

Целью настоящей работы является апробация процедуры аттестации механико-математических моделей на примере одноосного растяжения призматических образцов и сжатия цилиндрических образцов антифрикционных композитов.

1. Алгоритм аттестации механико-математических моделей. В данной работе алгоритм аттестации модели включает следующие действия:

1. Оценка области применимости модели на основе использования «стандартных» подходов (путем идентификации модели, сравнением с имеющимися данными);
2. Описание типа модели (качественная оценка механических свойств материала и характера деформирования);
3. Запись полной системы уравнений модели материала (для одноосного случая, в тензорной форме);
4. Определение полного набора материальных функций (с указанием их аргументов) и/или параметров;
5. Описание минимального набора испытаний, достаточного для построения всех материальных функций, обеспеченного аттестованными методиками;
6. Описание области использования модели (диапазон изменения деформаций, скоростей деформаций, температуры и т.д.); соответствие расчетов моделируемым явлениям;
7. Соответствие модели основным термодинамическим принципам;
8. Возможность обобщения на иные известные испытания (не обязательно);
9. Описание особенностей постановки и решения начально – краевой задачи с использованием предложенной модели.

Идентификация состоит из метода определения параметров модели (констант и/или материальных функций). Для этого могут быть использованы классические

подходы, методы, развиваемые в последнее время (теория решения некорректных обратных задач, методы математической статистики, вариационное исчисление, методы теории оптимальных процессов и др.). Идентификация включает, в основном, п. 1 – 5.

Верификация состоит в основном из оценки области применимости модели (указания диапазонов деформаций, скоростей деформации, качественно иных испытаний в сравнении с использованными при идентификации), проверки определения констант и материальных функций модели материала на устойчивость по отношению к экспериментальным данным, начальным и граничным условиям. Верификация включает п. 5 – 9.

Следует отметить, что невозможно строго определить методы идентификации и методы верификации. Так, например, определяя параметры или материальные функции модели, можно конкретизировать диапазон изменения последних.

Данная работа посвящена апробации алгоритма аттестации (идентификации и верификации) нелинейной вязкопластической модели материала с малым ненулевым пределом текучести. Нелинейность модели объясняется более широкой областью применимости и возможностью использования. Ненулевой предел текучести характеризует модель, которая является обобщением неньютоновской жидкости, как твердое тело. Ненулевой предел текучести является дополнительным признаком нелинейности и его следует учитывать при решении идентификационных задач.

Для достижения результата используются следующие подходы:

1. Точная математическая постановка и решение начально-краевых задач о движении (равновесии) материала в квазистатическом режиме.
2. Использование приближенных подходов для построения решения начально – краевых задач (п.1). Для этого можно использовать разложение в ряд Тейлора (или степенной ряд) с пренебрежением малых по сравнению с предыдущим, слагаемых, разложение по собственным (в том числе ортогональным функциям), представление непрерывных функций кусочно – непрерывными с использованием предельных переходов и др.
3. Использование приближенных моделей (методов) для решения начально – краевых задач (п.1) с оценкой максимальной возможной погрешности моделирования.
4. Составление и определение параметров модели (материальных функций) с помощью подходов п.п. 1-3.
5. Варьирование входных параметров в пределах экспериментальной погрешности и определения погрешности расчета выходных параметров.
6. Составление системы нелинейных, в общем виде интегро-дифференциальных, уравнений для параметров (материальных функций) используя результаты механических испытаний и аналитические, точные и приближенные решения прямых начально – краевых задач обобщением метода наименьших квадратов.
7. Представление качественно «новых» процессов или испытаний для описания предложенной механической моделью и оценка погрешности измеряемых параметров.

2. Математическое моделирование ползучести упруговязкопластических композитов. Постановка задачи. Искомые функциями задачи являются компоненты вектора скорости. В общем случае эти 3 компоненты зависят от 4 переменных (цилиндрических координат и времени)[1,2]:

$$V_r = V_r(r, \varphi, z, t), \quad V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z, t), \quad V_z = V_z(r, \varphi, z, t).$$

Считаем, что компоненты тензора скоростей деформации связаны с компонентами вектора скорости соотношениями Коши, которые в цилиндрической системе координат имеют вид [1,2]:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}; \quad \xi_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$\xi_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right); \quad \xi_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right); \quad \xi_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right).$$

Последние соотношения верны при малых градиентах компонент вектора скорости. Малые градиенты могут быть обеспечены при условии небольшой скорости нагружения и относительно большой рабочей длины образца.

Исходной является модель нелинейного упруговязкопластического материала с ненулевым пределом текучести. Аналитическая форма модели имеет следующий вид [2]:

$$\begin{cases} S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\tau}{H} \xi_{ij} \\ \tau = \tau_0 + K \left(\frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m \text{ при } \tau \geq \tau_0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ при } \tau < \tau_0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

здесь S_{ij} и ξ_{ij} – соответственно девиаторы напряжений и скоростей деформации, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно тензора напряжений и деформации, τ и H – интенсивности тензора напряжений и скоростей деформации соответственно, τ_0 – предел текучести, m –

параметр скоростной чувствительности, K – коэффициент вязкости, ε_0 – некоторая характерная скорость деформации, λ, μ – параметры Ламе, div – оператор дивергенции.

Постановка задачи о моделировании растяжения призматического образца с помощью нелинейной вязкопластической модели представлена более подробно в [3].

Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = 0,$$

здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши, Γ – подвижная боковая граница образца, n_j – нормаль к границе Γ .

Процесс движения разобьем на несколько состояний. Для каждого состояния верны следующие предположения:

- 1) изменением размеров тела можно пренебречь (аналогично квазистатическому подходу)
- 2) на верхнем торце образца задан постоянный вектор скорости, на боковых торцах нулевые усилия (свертка тензора напряжений и внешней нормали равна нулю), нижнее и верхнее сечения свободно скользят.

При сделанных предположениях относительно продольной скорости сделаем допущение:

$$V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Далее делаем предположение, что $\frac{\partial V_r}{\partial r}$ и $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$ являются функциями только времени. В силу сделанных предположений вектор скорости имеет вид:

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m} r, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Находим тензор скоростей деформации, для этого воспользуемся соотношениями Коши: $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$, где V_i – компоненты вектора скорости, x_i – декартовы координаты, $i, j = 1, 2, 3$. После несложных математических операций, получаем компоненты тензора скоростей деформации. Они имеют вид:

$$\xi_{11} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{22} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{33} = -\frac{v}{l_m}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0$$

После того, как компоненты тензора скоростей деформаций известны, находим интенсивность скоростей деформации (второй инвариант тензора) по известной формуле:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2)}$$

Последнее равенство верно для тензора скоростей деформации диагонального вида. После подстановки компонент имеем:

$$H = \frac{v}{l_m}$$

Воспользовавшись вторым соотношением в определяющих соотношениях модели, получим интенсивность девиатора напряжений τ :

$$\tau = \tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m$$

Согласно векторным соотношениям модели определим компоненты девиатора тензора напряжений. После несложных математических преобразований получим:

$$S_{11} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{22} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{33} = -\frac{2}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right),$$

$$S_{12} = 0, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = 0.$$

$$\text{Значение силы определяется выражением: } P_T(t_i) = \pi r_i^2 \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

2.1 Моделирование одноосного сжатия. Для определения параметров модели материала Флувис 20 проведено испытание на сжатие цилиндрических образцов радиусом 10 мм и высотой 30 мм со скоростью движения захвата $V = 5, 40, 100$ мм/мин (Instron 5567). Зависимости «Усилие - перемещение» приведены на рисунке 1.

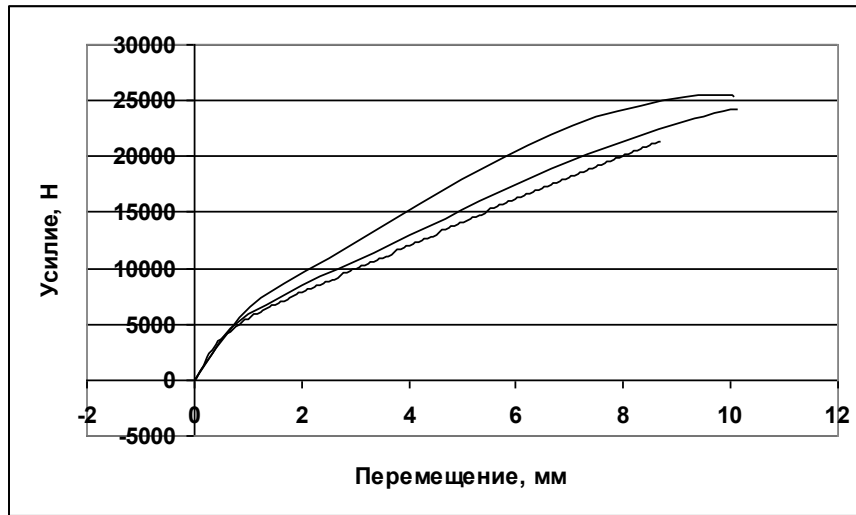


Рисунок 1. – Зависимость «Усилие (Н) – перемещение (мм)» для материала Флувис 20. Скорости 5(нижняя), 40(средняя), 100(верхняя) мм/мин.

Из зависимости «Усилие - перемещение» методом наименьших квадратов и значения точки перегиба кривой получены параметры модели в вязкопластической области:

$$\tau_0 = 16,16 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,0033 \text{ с}^{-1}: m=9,017; K=36,22 \text{ МПа}; \dot{\varepsilon} = 0,0036 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,026 \text{ с}^{-1}: m=4,717; K=39,88 \text{ МПа}; \dot{\varepsilon} = 0,03 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{При } \dot{\varepsilon}_{хар} = 0,067 \text{ с}^{-1}: m=6,094; K=41,77 \text{ МПа}; \dot{\varepsilon} = 0,07 \text{ с}^{-1}.$$

2.2 Моделирование текучести. Более полное описание задачи о текучести цилиндрических образцов представлено в [4]. При известных параметрах вязкопластической модели проведено моделирование текучести материала *FLUVIS 20*. С этой целью проведено испытание на текучесть при постоянной силе $P=12000$ Н и $P=15000$ Н. Данное значение силы достигалось движением захватов со скоростью $V = 10$ мм/мин.

При текучести образца материала имеет место следующая зависимость перемещения текучести от времени:

$$\kappa dt = \frac{du}{l_0 - u}$$

где l_0 - высота образца, соответствующая началу текучести ($l_0 = 25,09$ мм), l_1 - начальная высота образца ($l_1 = 30$ мм) для $P=15000$ Н, r_0 - начальный радиус образца ($r_0 = 10$ мм), κ - коэффициент, определяемый из следующего соотношения:

$$P_T(t_i) = \frac{\pi r_0^2 l_1}{l_0 - u} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\dot{\varepsilon}_0} k \right)^m \right)$$

Из предположения пропорциональности скорости деформации при ползучести приложенной силе на образец, получаем зависимость характерной скорости деформации при ползучести при силе P_2 :

$$\varepsilon_{02} = \frac{P_2}{P_1} \varepsilon_{01}$$

Интегральная зависимость текущего перемещения текучести от времени:

$$\frac{P_1}{P_2} \frac{K m}{\varepsilon_{01}} \int_{\frac{P_{\text{мек}} l_0}{\pi r_0^2 l_1}}^{\frac{P_{\text{мек}} l_0}{\pi r_0^2 l_1} x(x - \tau_0)^{\frac{1}{m}}} \frac{1}{x(x - \tau_0)^{\frac{1}{m}}} dx = t$$

где значения параметров K и m взяты из испытания со скоростью 5 мм/мин.

Из последнего соотношения получаем зависимость полного перемещения текучести от времени. Результаты сравнительного анализа расчетного и экспериментального значения, относительной погрешности представлены в таблице 1. ($P_2=15000$ Н).

Таблица 1. Результаты сравнительного анализа ($P_2=15000$ Н).

№	1	2	3	4	5
$t, \text{с}$	20	40	60	80	100
$u_{\text{calc}}, \text{мм}$	1,19	1,53	1,73	1,88	2,01
$u_{\text{test}}, \text{мм}$	1,09	1,47	1,70	1,89	2,02
$\delta, \%$	9,2	4,1	1,8	0,5	0,5

Заключение. Приближенное решение квазистатической задачи о сжатии цилиндрического образца и разработанная методика моделирования текучести хорошо согласуется с экспериментальными данными при больших временах деформирования. Более точное описание предполагает точное аналитическое решение задачи о сжатии цилиндрического образца и учета изменения параметров упруговязкопластической модели в процессе текучести.

Разработанный подход может быть использован в инженерных методиках расчета параметров формоизменения элементов узлов трения из нелинейных упруговязкопластических материалов.

Список обозначений

r, θ, z – цилиндрические координаты, x_i – декартовы координаты, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, ξ_{ij} – девиатор тензора скоростей деформации, λ, μ – параметры Ламе, div – оператор дивергенции, K – пластическая вязкость, τ_0 – предельное напряжение сдвига (предел текучести), m – параметр скоростной чувствительности, ε_0 – характерная скорость деформации, H – интенсивность девиатора тензора скоростей деформации, $\Delta \omega_{\text{вн}}^i$ – i -ая разность угловых скоростей внешнего и внутреннего цилиндров, $\sigma_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат, P_2 – усилие на образец при ползучести, l_0 – высота образца,

соответствующая началу текучести, l_1 - начальная высота образца, r_0 - начальный радиус образца, Γ - подвижная боковая граница образца, κ - коэффициент, определяемый из соотношения для усилия.

РЕЗЮМЕ

Представлен алгоритм аттестации механико-математических моделей полимерных материалов, который апробирован для нелинейной вязкопластической модели, с учетом значительного предела текучести и скоростной чувствительности. По результатам испытаний полимерного материала и композита на сжатие и растяжение проведена идентификация и верификация модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. – М.: МГУ, 1977. – 373 с.
3. Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Идентификация модели нелинейного вязкопластического материала при статическом растяжении с учетом изменения площади поперечного сечения образца // Материалы Технологии Инструменты. –2009. –Т. 14. –№ 1. –С. 22–27.
4. Гавриленко С.Л. Моделирование текучести нелинейно упруговязкопластических материалов в условиях одноосного сжатия // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 26. – С. 132–137.

SUMMARY

An algorithm for the attestation of mechanical and mathematical models has been suggested using the formulations and solutions of the initial-boundary value problem of solid mechanics. The developed approaches have been tested for polymeric materials with significant yield strength and velocity sensitivity.

E-mail: serega48@mail.ru

Поступила в редакцию 04.10.2014