

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЕВИАТОРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

к.т.н. Холодарь Б.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

При рассмотрении напряжено-деформированного состояния материала в точке нагруженного тела выделяют шаровую и девиаторную компоненты соответствующих тензоров. Шаровая деформация определяется как средняя $\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ и характеризует однородное расширение-сжатие материала. Компоненты тензора-девиатора деформаций характеризуют сдвиговое деформирование элементарного объема, сопровождающееся изменением его формы.

Ниже обсуждаются некоторые особенности связи между шаровой и девиаторной компонентами деформаций.

I. Формоизменение материала складывается из двух составляющих – формоизменения, проходящего при сохранении первоначально прямых углов элементарного параллелепипеда и характеризуемого диагональными компонентами тензора-девиатора (ортогональное формоизменение), и формоизменения, связанного с искажением этих углов и соответствующего внедиагональным компонентам тензора (угловое формоизменение).

Вырежем в некоторой точке тела элементарный объем в виде кубика со стороной da , боковые грани которого ориентированы перпендикулярно осям координат. Центр этого кубика обозначим точкой O . Ось $\bar{\Omega}$, равнонаклоненная к осям XYZ , пройдет через эту точку по ребру пентаэдра, построенного на одной из граней кубика. Для определенности выберем в качестве этой грани элементарную площадку, принадлежащую плоскости XY .

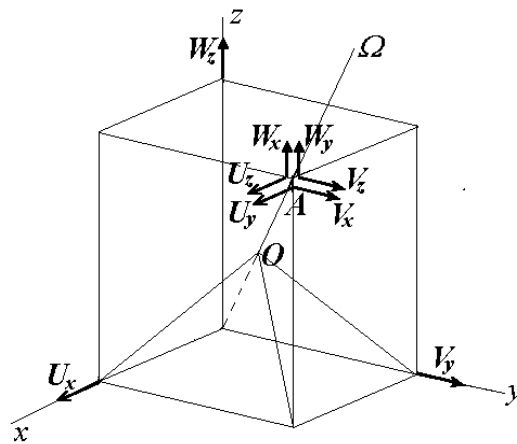


Рисунок 1. – Элементарный кубик и пентаэдр

Перемещения точек будем понимать как деформационные, не содержащие переносных смещений (рисунок 1). Перемещения точки A за счет осевых деформаций обозначены как U_x, V_y, W_z , где $U_x = \partial U / \partial x \cdot da = \varepsilon_x \cdot da$, $V_y = \varepsilon_y \cdot da$, $W_z = \varepsilon_z \cdot da$ (показаны на осях координат). Девиаторная часть перемещений, соответствующая нормальным деформациям, составляет $\delta x_\varepsilon = (2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z)/3 \cdot da$, $\delta y_\varepsilon = (2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z)/3 \cdot da$, $\delta z_\varepsilon = (2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y)/3 \cdot da$, а соответствующая сдвиговым деформациям – $\delta x_\gamma = U_y + U_z$, $\delta y_\gamma = V_x + V_z$, $\delta z_\gamma = W_x + W_y$, где $U_y = \partial U / \partial y \cdot da$ и т.д. Полные девиаторные перемещения точки A по осям составляют $\delta x = \delta x_\varepsilon + \delta x_\gamma$, $\delta y = \delta y_\varepsilon + \delta y_\gamma$, $\delta z = \delta z_\varepsilon + \delta z_\gamma$. Перемещения центральной точки O кубика (вершины пентаэдра) равны половине от перемещений точки A .

Смещение точки O , соответствующее нормальным компонентам девиатора, происходит в равнонаклоненной плоскости, перпендикулярной оси $\bar{\Omega}$. Это следует из определения скалярного произведения вектора $\bar{\Delta} = \bar{\delta x}_\varepsilon + \bar{\delta y}_\varepsilon + \bar{\delta z}_\varepsilon$ на орт $\bar{l} = (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) / \sqrt{3}$ оси $\bar{\Omega}$, поскольку $\delta x_\varepsilon + \delta y_\varepsilon + \delta z_\varepsilon = 0$ ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты осей координат элемента). Объем пентаэдра при этом не изменяется.

Если оси XYZ совпадают с осями главных деформаций, то сдвиговое смещение вершины пентаэдра полностью принадлежит октаэдрической плоскости (вектор $\bar{T}_{t0} = \overline{OM}_0$ на рисунок2а, $OM_0 = \sqrt{(U_x - V_y)^2 + (V_y - W_z)^2 + (W_z - U_x)^2} / \sqrt{12}$). Квадрат этого смещения равен половине величины второго инварианта девиатора деформаций. Полное смещение вершины пирамидки $\overline{OC} = \overline{OM}_0 + \overline{M}_0C$, где $M_0C = T_{n0} = \varepsilon_0 \cdot da \sqrt{3}/2$ – радиальное смещение точки O вдоль оси $\bar{\Omega}_0$.

Если элементарный объем вырезан в осях XYZ общего положения, причем так, что точка O остается зафиксированной на прежнем месте, то вектор девиаторного смещения точки O представится суммой двух компонент – вектора \overline{OM} , соответствующего ортогональному формоизменению и лежащего в равнонаклоненной плоскости, и вектора, соответствующего угловому формоизменению. Последний разложим на две компоненты – вектор \overline{MK} , также принадлежащий равнонаклоненной плоскости, и вектор $\bar{T}_n = \overline{KL}$, ей перпендикулярный. Вектор $\bar{T}_t = \overline{OK} =$

$= \overline{OM} + \overline{MK}$ дает для выбранного элемента смещение точки O в равнонаклоненной плоскости, а вектор \bar{T}_n вместе с шаровым, совпадающим по направлению с выбранной осью $\bar{\Omega}$, дает смещение \overline{KC} , перпендикулярное этой плоскости. Так как вектор смещения точки C является инвариантом, то всегда $\overline{OM} + \overline{MK} + \overline{KL} + \overline{LC} = \overline{OC}$.

Равнонаклоненные плоскости для выбираемых кубиков можно представить как плоскости, повернутые вокруг вершины O пентаэдра, построенного на осях главных деформаций, что отражается углом φ между осями $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_0$. Исходя из того, что треугольник OKC является прямоугольным, можно построить диаграммы возможных векторов девиаторных деформаций (перемещений) при изменении угла φ .

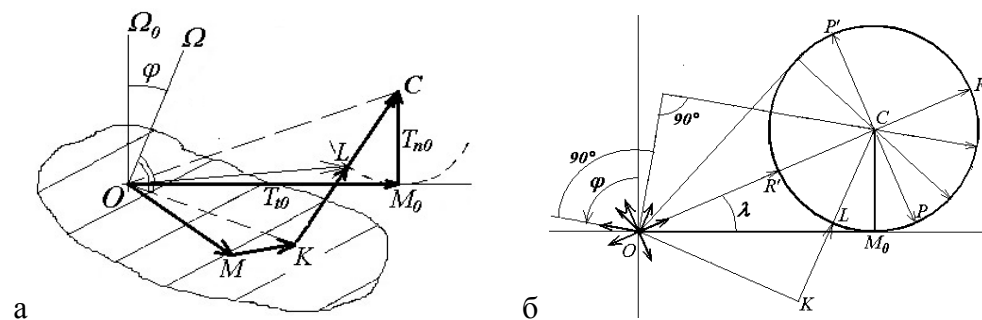


Рисунок 2. а - Равнонаклоненная плоскость и компоненты смещений; б - Диаграммы девиаторных деформаций

Несколько таких диаграмм построены на рисунок2б. Стрелками возле точки O показано направление нормалей к площадкам, отклоненных от оси $\bar{\Omega}_0$ на выбранные углы φ . Перпендикулярно им отложены отрезки $OK = T_t$, а вдоль нормалей – отрезки $KL = T_n$ до пересечения с окружностью радиуса T_{n0} в точке, откуда вектор шарового перемещения точки O направлен к центру C вдоль положительного направления выбранной нормали.

Используя рисунок2б, находим выражения для T_t, T_n, T :

$$\begin{aligned}
T_t &= T_{t0} \cos\varphi + T_{n0} \sin\varphi \\
T_n &= T_{t0} \sin\varphi + T_{n0} (1 - \cos\varphi) \\
T^2 &= T_{t0}^2 + 2T_{n0}^2 + 2T_{n0}(T_{t0} \sin\varphi - T_{n0} \cos\varphi)
\end{aligned}$$

Годографом вектора $\bar{T} = \overline{OL}$ служит окружность радиуса T_{n0} с центром в точке C , годографом вектора \bar{T}_t – окружность, построенная на OC как на диаметре, годографом \bar{T}_n – кривая типа кордоиды. При $\varphi < \pi$ изображающая точка L движется по правой от M_0 полусфере, при $\varphi > \pi$ – по левой. Длина вектора \bar{T} меняется от минимального значения $T^{min} = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2} - T_{n0}$ при $\varphi = 3\pi/2 + \lambda$ до максимального $T^{max} = OR = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2} + T_{n0}$ при $\varphi = \pi/2 + \lambda$. Векторы \bar{T}_n и \bar{T}_t изменяются от нуля до своих максимальных значений, которые составляют соответственно $T_t^{max} = \sqrt{T_{t0}^2 + T_{n0}^2}$ (при $\varphi = \lambda$ и $\varphi = \pi + \lambda$) и $T_n^{max} = T^{max}$.

Построенные векторные диаграммы являются обобщенными, позволяя охарактеризовать деформированное состояние материала в рассматриваемой точке вдоль любого заданного направления непосредственно в виде девиаторной и шаровой составляющих. Из диаграмм следует, что вектор девиаторного формоизменения \bar{T} зависит от шаровой деформации и может значительно превосходить вектор ортогонального формоизменения. Для углов $\varphi = \pi/2 + \lambda$ и $\varphi = 3\pi/2 + \lambda$ девиаторное перемещение равно соответственно максимальному и минимальному равномерному угловому перемещению, а полное деформационное перемещение равно сумме двух равномерных смещений (углового и объемного). Равномерное угловое формоизменение превращает кубик в трехмерный ромб, вытянутый вдоль оси $\bar{\Omega}$. Как видим, максимальное формоизменение не связано с площадками главных касательных напряжений или октаэдрическими площадками, а определяется углом λ .

Лежащие на оси \overline{OC} векторы максимальной угловой и шаровой деформаций можно рассматривать как деформационный винт по аналогии с кинематическим винтом в теоретической механике. Такая структура полностью характеризует деформированное состояние в точке тела.

Поскольку течение материала связано именно с формоизменением, то из представленного выше следует, что наиболее интенсивно оно идет по поверхности конуса с осью $\bar{\Omega}_0$ и углом полураствора $\pi/2 - \lambda$. Основываясь на этом, можно сформулировать следующий критерий перехода материала в состояние текучести (критерий максимального формоизменения): началу течения соответствует достижение максимальным девиаторным перемещением OR своего предельного уровня T_p .

Этот уровень может быть установлен из опыта на одномерное растяжение образца до деформации, соответствующей пределу текучести (пропорциональности) материала.

Поскольку для одноосного растяжения $T_{n0} = \frac{1-2\mu}{3} \varepsilon_1$, $T_{t0} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (1+\mu) \varepsilon_1$, то

$$T_p^2 = \frac{1}{18} \left[(1+\mu)^2 + 4(1-2\mu)^2 + 2\sqrt{2}(1+\mu)(1-2\mu) \right] \frac{\sigma_T^2}{E^2}, \quad (1)$$

где μ – коэффициент Пуассона, σ_T – предел текучести, E – модуль упругости материала.

Для случая плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$) изотропного тела

$$T_{n0} = \frac{(1-\mu)^2}{3} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E}; \quad T_{i0}^2 = \frac{1}{18} \left\{ \left[(1+m+m^2)(1-m)^2 + 3m \right] (s_1 + s_2)^2 - 3(1+m)^2 s_1 s_2 \right\} \frac{1}{E^2},$$

и критерий в безразмерной форме ($S = \sigma/\sigma_T$) принимает вид:

$$k_2(S_1^2 + S_2^2) + (2k_2 - 3(1+\mu)^2)S_1S_2 + 2\sqrt{2}(1-\mu)^2 \sqrt{k_1(S_1^2 + S_2^2) + (2k_1 - 3(1+\mu)^2)S_1S_2} (S_1 + S_2) = B^2, \quad (2)$$

где $k_1 = (1+\mu+\mu^2)(1-\mu)^2 + 3\mu$, $k_2 = k_1 + 4(1-\mu)^4$, B – скобка в выражении (1).

Уравнение (2) приводится к квадратному при замене переменных $U = (S_2 + S_1)^2/2$, $V = (S_2 - S_1)^2/2$. Критерий существенно зависит от μ , и для $0 \leq \mu \leq 0.5$ представлен в виде кривых на рисунок 3а. Видно, что для μ , характерных для типичных металлов, при $S_1 \cdot S_2 > 0$ кривые располагаются внутри области, ограниченной критерием Мизеса. При $\mu = 0.5$ критериальная кривая имеет общую точку $S_1 = -S_2 = 1/\sqrt{3}$ с эллипсом Мизеса. Эти значения μ и S соответствуют состоянию течения материала при чистом сдвиге.

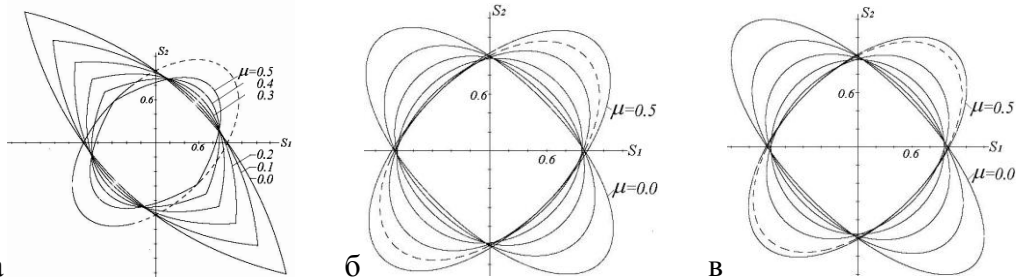


Рисунок 3. Критерий зарождения текучести (а) и критерии развитой текучести (б - линейное осреднение, в - квадратичное осреднение); пунктирная линия - критерий Мизеса

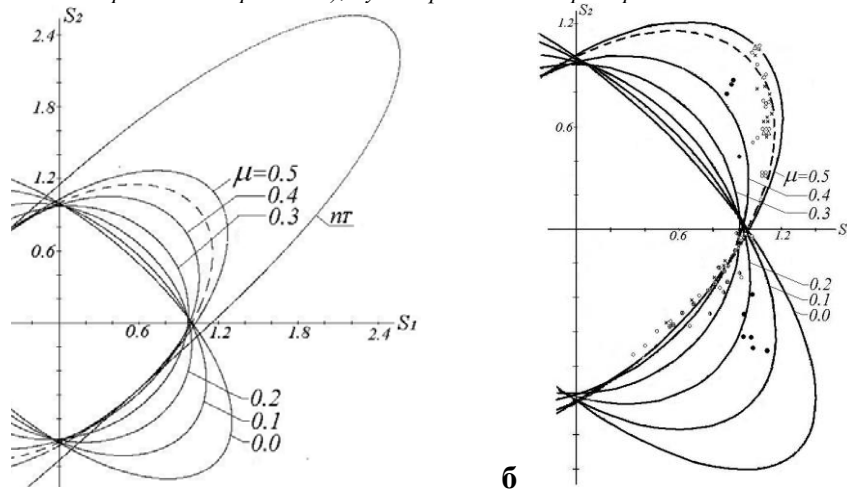


Рисунок 4. а - Кривая полной текучести (индекс "nT"), б - Сравнение с данными экспериментов для чугуна, стали, меди, никеля, алюминия (показаны точками по [1])

Критерий (2) отражает момент зарождения текучести материала в данной точке, и для описания развитого течения склерономного тела его простейшим образом можно модифицировать, используя осреднение по всем равнонаклоненным площадкам, что в нашем случае выразится в виде интегралов $\oint OLd\varphi$ или $\oint OL^2d\varphi$ при $\varphi \in [0, 2\pi]$. При этом среднеквадратическое осреднение сводится к выражению $T = \sqrt{T_{i0}^2 + 2T_{n0}^2}$ и представляется на диаграмме отрезками OP и OP' , а уравнение (2) преобразуется к виду:

$$S_1^2 + S_2^2 + 2\frac{k_3}{k_2}S_1S_2 = \frac{D^2}{k_2}, \quad (3)$$

где $k_3 = k_2 - \frac{3}{2}(1 + \mu)^2$, $D^2 = (1 + \mu)^2 + 4(1 - 2\mu)^2$.

Результаты применения осреднений и их соответствие известным экспериментальным данным иллюстрируются рисунком 3 и рисунком 4. Как видим, форма критерия с квадратическим осреднением при $\mu=0.5$ достаточно хорошо согласуется с опытными данными [1,2], которые фиксируют именно развитую текучесть в конечном объеме упруго-пластического материала при заданном уровне остаточных деформаций. Группировку экспериментальных точек для разнородных материалов между кривыми $\mu=0.4$ и $\mu=0.5$ можно связать с тем, что при переходе материала за предел пропорциональности коэффициент Пуассона быстро увеличивается, стремясь к своему предельному значению $\mu=0.5$ [2], соответствующему жидкотекучему состоянию материала. Близостью критерия Мизеса к предельной кривой $\mu=0.5$ объясняется, на наш взгляд, его универсальность, выражающаяся в использовании его в качестве критерия текучести при $S = \sigma/\sigma_T$ и в качестве критерия прочности при $S = \sigma/\sigma_B$. Особенностью хода кривых в зоне $S_1 \cdot S_2 < 0$ является удаление их от кривой Мизеса (увеличение выпуклости) с уменьшением коэффициента Пуассона, что отвечает результатам испытаний материалов разной хрупкости [1].

Диаграмма дает возможность более полного представления о деформированном состоянии материала в точке тела, позволяя оценивать относительную долю ω объема материала вокруг нее, перешедшего в состояние текучести (незаштрихованная часть объема сферы C на рисунок 5а), и более обосновано подойти к определению величин допускаемых нагрузок.

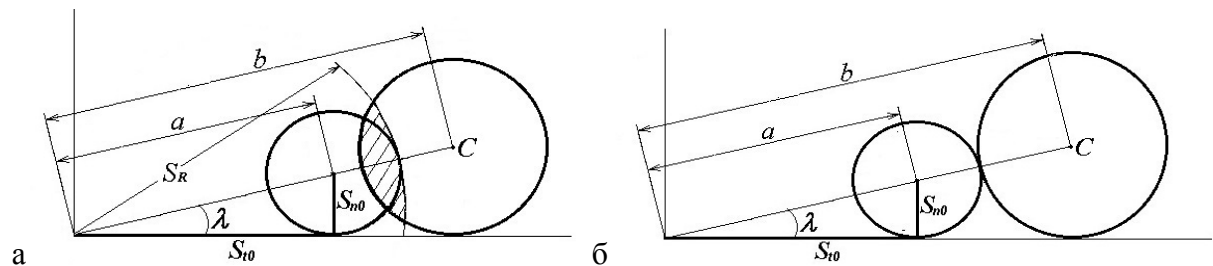


Рисунок 5. а - Частичная текучесть в точке ($1 < n < n_k$), - упругая $S < S_R$ и неупругая $S > S_R$ зоны работы материала; б - Полная текучесть ($n = n_k$)

Например, если при заданном $\lambda = \text{arctg}(T_{n0}/T_{i0})$ достигнут уровень зарождения текучести при нагрузке P_n , то при сохранении режима пропорционального нагружения весь объем материала перейдет в пластическое состояние при нагрузке полной текучести, равной $P_k = P_n \frac{b}{a} = P_n \frac{\sqrt{1 + \text{ctg} \lambda + 1}}{\sqrt{1 + \text{ctg} \lambda - 1}}$. Обозначив $n_k = P_k/P_n$, найдем для него

несколько значений, учитывая также, что при этом $\mu=0.5$: $\lambda=0^\circ - n_k=1.0$, $\lambda=15^\circ - n_k \approx 1.7$, $\lambda=30^\circ - n_k \approx 3.0$, $\lambda=45^\circ - n_k \approx 5.8$, $\lambda=60^\circ - n_k \approx 13.9$. Судя по этим числам, полная текучесть для многих материалов и напряженных состояний при нормальных температурах является недостижимой. Для случая плоского напряженного состояния это видно по кривой с индексом "нТ" на рисунок 4 – при двухосном растяжении имеем $S_1 = S_2 \approx 2.5$, что не реализуется экспериментально. Кривые $n_k(\lambda)$ и $\alpha(n, \lambda)$ показаны на рисунок 6.

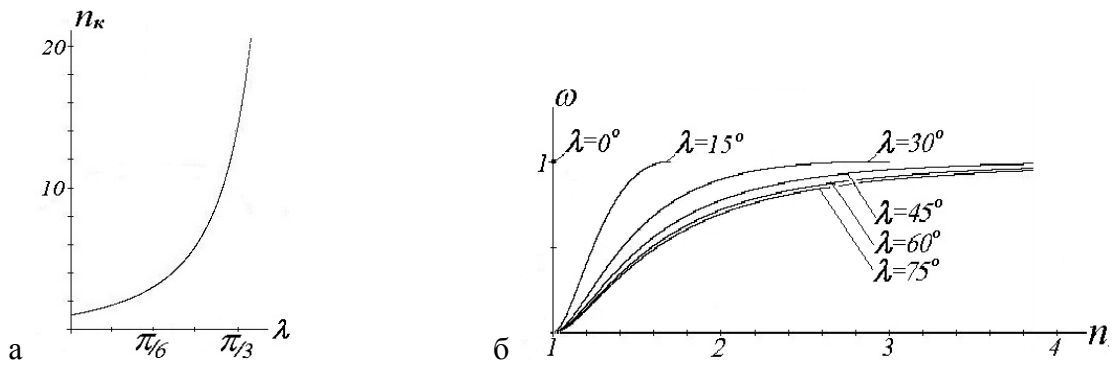


Рисунок 6. а - Коэффициент полной пластичности $n_k(\lambda)$; б - Коэффициент относительного неупругого объема $\omega(n, \lambda)$ в точке тела

Естественно, приведенные оценки ограничены, поскольку связь между напряжениями и деформациями была выражена соотношениями обобщенного закона Гука, но сами исходные представления не противоречат возможности использования нелинейных зависимостей между интенсивностями деформаций и напряжений, принятыми в теории пластичности. Допустимо предположить, что коэффициент $\omega(n, \lambda)$ может быть положен в основу построения критерия разрушения склерономных упруго-пластических материалов.

Следствием данного рассмотрения является возможность обоснования более сложных критериев, используемых для описания процессов деформирования и накопления поврежденности реономных материалов, поскольку скорости этих процессов контролируются достигнутым уровнем снижения их энергий активации, зависящим, в свою очередь, от инвариантов напряженно-деформированного состояния. При описании течения материалов используется энергия активации девиаторных компонент деформаций, при описании развития поврежденности – энергии активации шаровой и девиаторной компонент поврежденности [3,4]. С аналогичных позиций можно подойти и построению критерия прочности склерономного анизотропного материала [5].

II. Изменение углов поворота в механике связывают с действием моментов, но в случае углового формоизменения следует, очевидно, говорить о действии силовых факторов в виде некоторых бимоментов сдвига. В механике сплошной среды такие бимоменты обеспечиваются действием касательных напряжений, подчиненных закону парности (τ_{xy} и τ_{yx} , τ_{yz} и τ_{zy} , τ_{zx} и τ_{xz}). Бимомент, соответствующий максимальному равномерному угловому формоизменению, и среднее объемное напряжение образуют деформационную динаму – силовой аналог деформационного винта. При этом бимомент связан с изменением телесного угла в точке А.

При равномерном угловом формоизменении сдвиговые смещения по осям координат одинаковы: $\delta x_\gamma = \delta y_\gamma = \delta z_\gamma$. Обозначив их величину через δ , находим смещение вершины А вдоль оси $\bar{\Omega}$ кубика – $\Delta = \delta \sqrt{3}$ и изменение прямого угла при вершине – $\delta\gamma = 3\delta/da$.

Если сдвиговые смещения неодинаковы, то равномерное угловое формоизменение определяется величиной среднего смещения $\delta = (\delta x_\gamma + \delta y_\gamma + \delta z_\gamma)/3$. Тогда величины

$\delta x_\gamma - \delta = (2\delta x_\gamma - \delta y_\gamma - \delta z_\gamma)/3$, $\delta y_\gamma - \delta = (2\delta y_\gamma - \delta z_\gamma - \delta x_\gamma)/3$, $\delta z_\gamma - \delta = (2\delta z_\gamma - \delta x_\gamma - \delta y_\gamma)/3$ будут характеризовать неравномерное формоизменение, выраженное через перемещения вдоль осей координат. Для его числовой характеристики можно использовать длину этого вектора или величину среднеквадратического отклонения от равномерного формоизменения $\Delta_\gamma = \sqrt{(\delta x_\gamma - \delta)^2 + (\delta y_\gamma - \delta)^2 + (\delta z_\gamma - \delta)^2} / \sqrt{3}$. Это выражение по

форме записи соответствует корню квадратному из величины второго инварианта тензора-девиатора деформаций, отражающего отклонение величин линейных деформаций материала от среднего уровня при ортогональном формоизменении. В развернутом виде Δ_γ можно выразить через компоненты угловых деформаций и компоненты вращений.

Выделение равномерной и неравномерной составляющих как линейных, так и угловых деформаций позволяет более наглядно представить характер деформированного состояния в точке тела.

III. Выводы. Построена диаграмма, связывающая величины девиаторных и шаровых деформаций в точке, на основе которой предложен критерий перехода материала в пластическое состояние. Определены величины равномерного и неравномерного сдвиговых формоизменений. Полученные результаты способствуют углублению представлений о процессе течения материалов.

РЕЗЮМЕ

Построена диаграмма, связывающая величины шаровой и девиаторной компонент деформаций. Предложен критерий перехода материала в пластическое состояние (критерий максимального формоизменения). Полученные результаты способствуют углублению представлений о деформировании материала за пределом текучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Д. Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том I. ГНТИ машиностроительной литературы. М., 1956, –884с.
2. Н.Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. Из-во «Машиностроение», М., 1968, –400с.
3. Б.Г. Холодарь. Поведение реономного упруго-пластического материала в режимах нагружения с постоянной скоростью // Деформация и разрушение материалов. – М: Интерконтакт «Наука». – 2009. – №8. – С.14-22.
4. Б.Г. Холодарь. Долговечность материала при сложном напряженном состоянии // Деформация и разрушение материалов. – М: Интерконтакт «Наука». – 2013. – №3. – С.8-13.
5. Б.Г. Холодарь. Построение критерия прочности анизотропного тела. // Строительная механика и расчет сооружений. – М: НИЦ «Строительство». – 2013. – № 2 – С.21-26.

SUMMARY

The diagram linking the values of the spherical and deviatoric strain components is created. A criterion for the transition of the material to the plastic state (criterion of maximum form change) is proposed. The results obtained contribute to the deepening of the understanding about the deformation of the material beyond the yield point.

E-mail: hbg@list.ru

Поступила в редакцию 14.10.2014