

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЖЕСТКОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

асп. Петровский А.Л., д.ф.-м.н. Чигарев А.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В настоящее время при производстве центробежного оборудования наблюдается устойчивая тенденция расширения возможностей и повышения функциональных характеристик, разрабатываемых изделий, в том числе за счёт повышения рабочих частот вращения. Понятно, что чем выше скорость вращения рабочего органа, тем большие нагрузки и вибрации передаются на элементы и узлы машины. Основной причиной возникновения вибраций в центробежном оборудовании, в частности в дробилках, мельницах, центрифугах, центробежных литейных машинах, является наличие дисбалансов в роторной системе. Причем, наличие несбалансированных масс может быть вызвано рабочим телом, участвующим в технологическом процессе, так и особенностями конструкции роторной системы (величинами допусков, зазоров, контактов поверхностей).

Существенными элементами, препятствующими распространению вибраций в центробежном оборудовании, являются виброизоляторы или другие упругодемпфирующие элементы. Определение и точный подбор характеристики виброизоляторов является очень важной и ответственной задачей для производителя, поскольку от этого зависит не только качество производимого изделия, но и долговечность самого оборудования и его узлов.

Для наглядного представления центробежных машин с вертикальным расположением вала и явлений, происходящих при их работе, рассмотрим принцип работы центробежной литейной машины (рисунок 1).

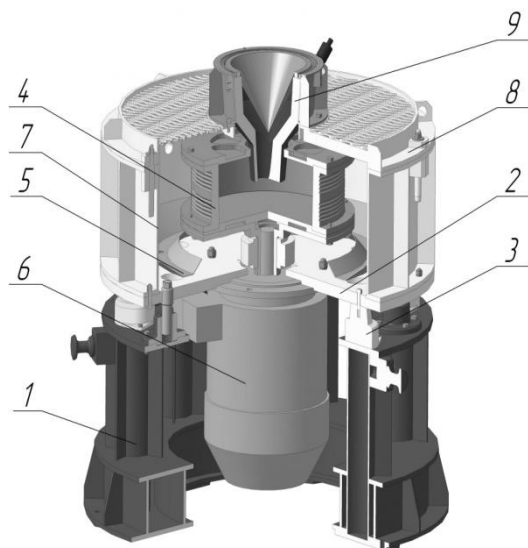


Рисунок 2 - Центробежная литейная машина

Литейные машины с вертикальной осью вращения представляют собой сборную конструкцию, состоящую из основания 1, плиты 2, установленной на упругих элементах 3, кристаллизатора 4. На плите 2 крепятся электродвигатель 6, поддон 5 и кожух 7, который закрыт крышкой 8. На крышке 8 установлена воронка 9.

Литейные машины работают следующим образом: кристаллизатор 4 приводится во вращение электродвигателем 6, расплавленный металл через воронку подается в центр вращающегося кристаллизатора и под действием центробежных сил отбрасывается к стенкам кристаллизатора. После затвердевания расплава и охлаждения кристаллизатор останавливают и извлекают отливку.

Следует отметить, что в процессе подачи расплава в кристаллизатор возникает дисбаланс, вызванный технологическим процессом, величины которого может быть различной и возбудить колебания системы (рабочего органа РО) кристаллизатор-плита-двигатель на упругих элементах. В зависимости от характеристик упругих элементов в литейной машине могут происходить следующие явления:

- кратковременное гашение колебаний системы РО;
- долговременное гашение колебаний системы РО.

В случае очень быстрого кратковременного гашения колебаний, которое возникает при чрезмерно высокой жесткости и демпфировании упругих элементов, усилия от дисбаланса кристаллизатора (ротора) могут передаваться на подшипники вала двигателя, что в свою очередь значительно сократит ресурс машины. Долговременное гашение колебаний, которое возникает при недостаточной жесткости и демпфировании упругих элементов, может привести к браку изготавливаемой продукции.

Для анализа влияния коэффициентов жесткости и демпфирования на колебательные процессы, протекающие в центробежном оборудовании, рассмотрим систему с двумя степенями свободы [1, 2, 3]. Упрощение кинематической схемы реальных центробежных машин до двухмассовой вытекает из следующих предположений:

- рассматриваются только вертикальные колебания
- система РО (ротор-платформа-двигатель) принята за единую массу, на которую оказывается взаимодействия периодического характера;
- другую массу представляет собой корпус центробежной машины;
- корпус центробежной машины также установлен на упругодемпферные опоры или вязкоупругий материал.

Отличием от описанной в литературе двухмассовой системы является введение в кинематическую схему дополнительного вязкого сопротивления, поскольку взаимосвязь как между рабочим органом и корпусом, так и корпусом и полом осуществляется с помощью упругодемпферных опор или вязкоупругих материалов. Кинематическая схема системы с двумя степенями свободы приведена на рисунке 2.

Введём следующие обозначения:

- **m1** - масса рабочего органа (двигатель, ротор, опорная платформа);
- **m2** - масса корпуса;
- **k1** – коэффициент жёсткости опор между рабочим органом и корпусом;
- **d1** – коэффициент демпфирования опор между рабочим органом и корпусом;
- **k2** – коэффициент жёсткости опор между корпусом и полом;
- **d2** – коэффициент демпфирования опор между корпусом и полом;
- **z1** – вертикальные перемещения массы **m1**;
- **z2** – вертикальные перемещения массы **m2**.

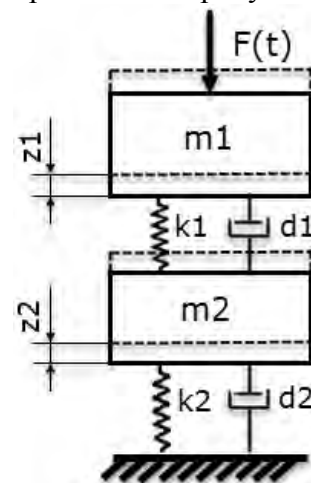


Рисунок 3 - Кинематическая схема системы с двумя степенями свободы

Колебание системы осуществляется под действием силы $F(t)$ периодического характера с изменяемой частотой в соответствии с уравнениями (1), что приближённо соответствует разгону ротора с дисбалансом.

$$\begin{cases} F(t) = PCos(\omega(t)t) \\ \omega(t) = 4t \end{cases} \quad (1)$$

На рисунке 3 приведен график изменения возмущающей силы $F(t)$ по времен.

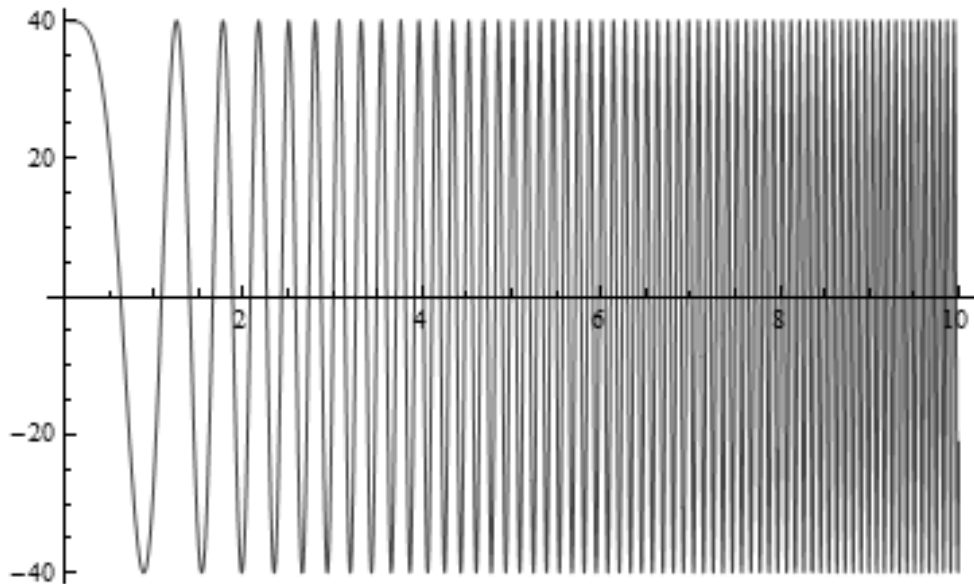


Рисунок 4 - График возмущающего воздействия $F(t)$ на систему

На основании второго закона Ньютона, запишем проекции сил на ось **OZ**:

$$\begin{cases} F(t) - k_1(z_1 - z_2) - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = m_1\ddot{z}_1 \\ k_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2z_2 - d_2\dot{z}_2 = m_2\ddot{z}_2 \end{cases} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (ДУ), описывающие колебание системы с двумя степенями свободы, запишем в виде:

$$\begin{cases} m_1\ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_2) + d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = P\cos(4t^2) \\ m_2\ddot{z}_2 + k_2z_2 - k_1(z_1 - z_2) + d_2\dot{z}_2 - d_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Для удобства решения системы ДУ (3) введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a = \frac{k_1}{m_1}; \quad d = \frac{d_1}{m_1}; \quad b = \frac{k_1+k_2}{m_2}; \quad c = \frac{k_1}{m_2}; \\ g = \frac{d_1}{m_2}; \quad e = \frac{d_1+d_2}{m_2}; \quad p = \frac{P}{m_1} \end{aligned} \quad (4)$$

С учётом обозначений (4) система уравнений (3) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + d(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + a(z_1 - z_2) = p\cos(4t^2) \\ \ddot{z}_2 + e\dot{z}_2 - g\dot{z}_1 + bz_2 - cz_1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы ДУ (5) состоит из частного и общего решений. Частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям с вязким трением, находим в виде:

$$\begin{cases} z_1 = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t) \\ z_2 = C_3\sin(\omega t) + C_4\cos(\omega t) \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя уравнения (6) в (5) и приравнявая к 0 коэффициенты при $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$ получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{cases} -C_1\omega^2 + d\omega(C_4 - C_2) + a(C_1 - C_3) = 0 \\ -C_2\omega^2 + d\omega(C_1 - C_3) + a(C_2 - C_4) = p \\ -C_3\omega^2 - eC_4\omega + gC_2\omega + bC_3 - cC_1 = 0 \\ -C_4\omega^2 + eC_3\omega - gC_1\omega + bC_4 - cC_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Для нахождения общего решения, соответствующего свободным затухающим колебаниям, опустим правую часть первого уравнения системы (5) и рассмотрим соответствующую систему однородных ДУ

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + d(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + a(z_1 - z_2) = 0 \\ \ddot{z}_2 + e\dot{z}_2 - g\dot{z}_1 + bz_2 - cz_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение системы ДУ (8) ищем в виде:

$$\begin{cases} z_1 = D_1 e^{st} \\ z_1 = D_2 e^{st} \end{cases} \quad (9)$$

Подставив (9) в (8) получим соотношения для определения коэффициентов D_1 и D_2 :

$$\begin{cases} D_1(s^2 + ds + a) - D_2(ds + a) = 0 \\ D_2(s^2 + es + b) - D_1(gs + c) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) могут дать отличные от 0 значения D_1 и D_2 только в том случае, если равен 0 определитель системы:

$$(s^2 + es + b)(s^2 + ds + a) - (ds + a)(gs + c) = 0 \quad (11)$$

Решение уравнений высших порядков приведено в [4].

Уравнение (11) имеет 4 корня, дающие четыре частных решения (9) уравнений (8). Общее решение уравнений (8) получается комбинированием этих четырех решений. Если вязкое сопротивление настолько мало, что могут происходить колебания, то все четыре корня уравнения (11) должны быть комплексными с отрицательными действительными частями, доказано [5].

$$\begin{cases} s_1 = -n_1 + ir_1 \\ s_2 = -n_1 - ir_1 \\ s_3 = -n_2 + ir_2 \\ s_4 = -n_2 - ir_2 \end{cases} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = e^{-n_1 t}(D'_{11} \cos(r_1 t) + D'_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D'_{21} \cos(r_2 t) + D'_{22} \sin(r_2 t)) \\ z_2 = e^{-n_1 t}(D''_{11} \cos(r_1 t) + D''_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D''_{21} \cos(r_2 t) + D''_{22} \sin(r_2 t)) \end{cases} \quad (13)$$

Общее решение уравнения (5) получено суммированием уравнений (6) и (13):

$$\begin{cases} z_1 = e^{-n_1 t}(D'_{11} \cos(r_1 t) + D'_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D'_{21} \cos(r_2 t) + D'_{22} \sin(r_2 t)) + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) \\ z_2 = e^{-n_1 t}(D''_{11} \cos(r_1 t) + D''_{12} \sin(r_1 t)) + e^{-n_2 t}(D''_{21} \cos(r_2 t) + D''_{22} \sin(r_2 t)) + C_3 \sin(\omega t) + C_4 \cos(\omega t) \end{cases} \quad (14)$$

Численное решение системы уравнений (14) было получено в пакетах Mathematica и MSC.ADAMS. В качестве примера для численного анализа были использованы характеристики прототипа центробежного оборудования, описанного в [6]: масса рабочего органа $m_1=6,3$ кг; масса корпуса $m_2=1,4$ кг. Коэффициенты жесткости подбирались из условия статического сжатия каждой опоры на 10-30% от начальной длины под действием максимального (статического) нагружения, т.е.:

$$\begin{cases} \frac{m_1 9.81 + p}{0.3 l_{10}} < k_1 < \frac{m_1 9.81 + p}{0.1 l_{10}} \\ \frac{(m_1 + m_2) 9.81 + p}{0.3 l_{20}} < k_2 < \frac{(m_1 + m_2) 9.81 + p}{0.1 l_{20}} \end{cases} \quad (15)$$

где l_{10} , l_{20} – длины опор в свободном состоянии. Данные соотношения рекомендованы компанией GERB (производитель виброопор), которые в свою очередь основаны на DIN EN 13906-1.

Характеристики уругодемпферных опор для каждого варианта исследования приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значения коэффициентов жесткости и демпфирования

	Вар_1	Вар_2	Вар_3	Вар_4	Вар_5	Вар_6	Вар_7	Вар_8
k1, Н/мм	4,12	2.26	6.78	2.23	6.78	4,12	4,12	4,12
k2, Н/мм	7,55	3.85	11.55	11.55	3.85	7,55	7,55	7,55
d1, (Нс)/мм	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,5	1	2,28
d2, (Нс)/мм	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1	0.5	0,299

Поскольку численное решение системы уравнений в пакете Mathematica полностью соответствует решению, полученному с помощью моделирования колебательного процесса системы с двумя степенями свободы в пакете MSC.ADAMS View (сравнение проводилось для Варианта 1), то последующий анализ проводится на базе виртуальных моделей.

В таблице 2 приведены основные параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для первого варианта упругих и демпфирующих характеристик опор (таблица 1): перемещения, скорости и ускорения тел **m1** и **m2**; усилия в пружинах **k1** и **k2**; критическая частота и временной интервал её наступления.

Таблица 2 - Параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для варианта 1

Вар_1	Z ₁	Z ₂	V ₁	V ₂	a ₁	a ₂	F ₁	F ₂	ω _{кр}	t _{кр}
Ед.	мм	мм	м/с	м/с	м/с ²	м/с ²	Н	Н	Гц	с
Знач.	63.4	23.2	1.063	0.394	22.93	8.57	219.7	195.3	2(3.3)	3.03(5)

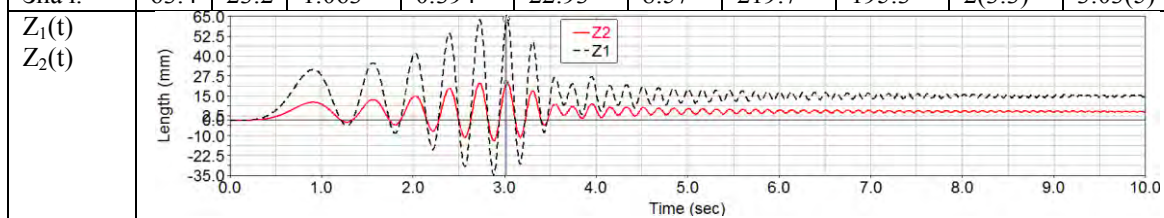


Рисунок 5 - График изменения перемещений тел m1 и m2

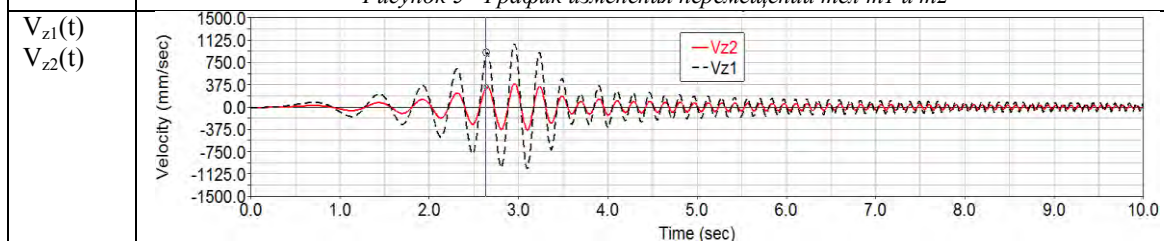


Рисунок 6 - График изменения скоростей тел m1 и m2

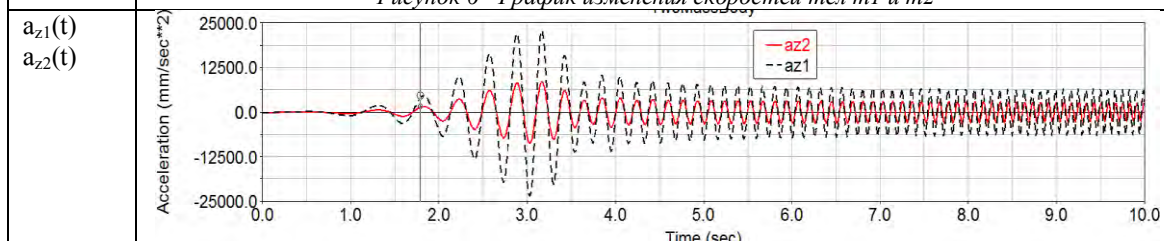


Рисунок 7 - График изменения ускорений тел m1 и m2

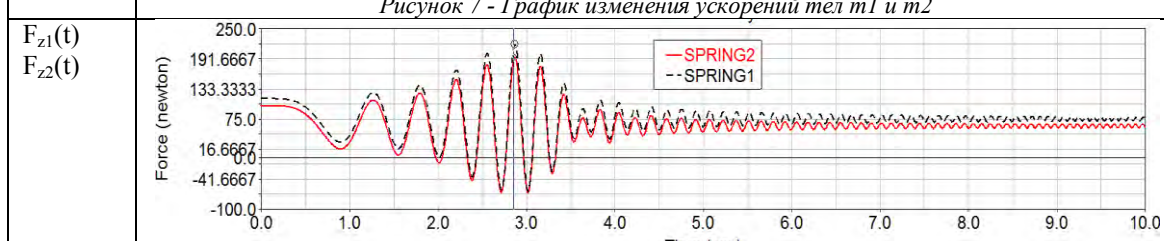


Рисунок 8 - График изменения усилий в пружинах k1 и k2

В таблице 3 в соответствии с вариантом набора характеристик опор (таблица 1) приведены максимальные значения перемещений, скоростей, ускорений колебаний, максимальные усилия в пружинах, критические частоты и период разгона, при котором они наступают.

Таблица 3 - Параметры, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы для всех вариантов

	Z_1	Z_2	V_1	V_2	a_1	a_2	F_1	F_2	$\omega_{кр}$	$t_{кр}$
Ед.	мм	мм	м/с	м/с	м/с ²	м/с ²	Н	Н	Гц	с
Вар_1	63.4	23.2	1.063	0.394	22.93	8.57	219.7	195.3	2	3.03
Вар_2	94.27	35.68	1.71	0.413	17.25	6.65	183.5	161.5	1.4	2.08
Вар_3	47.5	18.27	1.015	0.397	27.89	10.868	251.4	222.8	2.33	3.5
Вар_4	75	13	0.985	0.178	18.79	3.385	187.5	169	1.62	2.43
Вар_5	54.87	35.62	0.765	0.5	16.45	10.77	184	159	1.8	2.74
Вар_6	27	9.5	0.112	0.038	4.48	1.46	118.8	104.8	0.66	1
Вар_7	24.6	10.3	0.111	0.073	5.146	3.4	119.4	104.96	0.66	1
Вар_8	20.6	10.6	0.143	0.126	4.75	5.39	127	110	1.16	2.04

Анализируя максимальные значения, характеризующие колебательный процесс системы с двумя степенями свободы, приведенные в таблице 3, необходимо отметить следующие тенденции (последующие выводы приведены относительно варианта 1 набора характеристик опор):

- одновременное снижение жесткостей пружин обоих опор при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды и скорости колебаний; снижению ускорений колебаний, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 2);
- одновременное увеличение жесткостей пружин обоих опор при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к снижению амплитуды и скорости колебаний; увеличению ускорений колебаний, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 3);
- увеличение жесткости пружин верхней опоры (опора ротора) и снижение жесткости нижней опоры (опоры корпуса) при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды колебаний ротора и снижению амплитуды корпуса, скоростей, ускорений колебаний обоих опор, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 4);
- увеличение жесткости пружин нижней опоры и снижение жесткости верхней опоры при одинаково малых коэффициентах демпфирования приводит к увеличению амплитуды колебаний корпуса и снижению амплитуды ротора, скоростей, ускорений колебаний обоих опор, усилий в пружинах и критической частоты (Вариант 5);
- одновременное увеличение коэффициентов демпфирования до значений близких скоростям колебаний в варианте 1 и неизменных коэффициентах жесткости обоих опор приводит к значительному снижению всех параметров, характеризующих колебательный процесс системы с двумя степенями свободы (Варианты 6,7);
- чрезмерное увеличение коэффициента демпфирования верхней опоры приводит к снижению амплитуды колебаний ротора, но увеличению скоростей колебаний обоих опор, усилий в обоих пружинах и критической частоты (Вариант 8) по сравнению с вариантами 6, 7.

В результате сопоставления всех восьми вариантов расчета видно, что наилучшие параметры, характеризующие колебательный процесс системы, получены в вар. 6 и 7.

В заключении следует отметить, что при подборе виброизоляторов следует учитывать весь вышеприведенный комплекс параметров. Коэффициенты жесткости опор ротора и опор корпуса центробежного оборудования должны удовлетворять соотношениям (15). Коэффициенты демпфирования должны соответствовать максимальным скоростям, соответствующим критическим частотам.

РЕЗЮМЕ

В работе описан упрощенный метод анализа осевых колебаний центробежной техники с вертикальным расположением вала. Получены дифференциальные уравнения вынужденных колебаний с вязким сопротивлением для системы с двумя степенями свободы. Проведен анализ влияния коэффициентов жесткости и демпфирования на колебания системы с двумя степенями свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев, Б.Г. Динамические гасители колебаний/ Б.Г. Корнев, Л.М. Резников. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Илт., 1988. – 304с.
2. Mehta J.S., Kailey A.S., Mechanical Vibrations – S.Chand, 2012 - 362.
3. William T. Tomson, Marie Dillon Dahleh, Theory of Vibration with Application, University of California at Santa Barbara 1998. – 546с.
4. Фрид, Э. Малая математическая энциклопедия / Э. Фрид, И. Пастор, И Рейман, П. Ревес, И.Ружа, Будапешт, 1976. – 694с.
5. Hurwitz A. Math. Ann. T46, - 1895. – 273с.
6. Петровский А.Л. Диагностика роторных систем для выявления резонансных частот на изменяемых рабочих режимах/ А.Л. Петровский, С.Р. Шепель. – Материалы 4-й Междунар. научно-технической конф. «Переработка мин. сырья. Инновационные технологии и оборудование», Минск 2012

SUMMARY

The article describes a simplified method of analysis of axial vibration of the centrifugal machines with vertical shaft. The differential equations of forced vibration with viscous resistance for a system with two degrees of freedom are obtained. Analysis of influence coefficients of stiffness and damping on the oscillation of a system with two degrees of freedom are carried.

E-mail: hetfieldlion@mail.ru
chigarev@rambler.ru

Поступила в редакцию 31.10.2014