

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕУПРУГОЙ  
ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ  
НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ**

д.ф.-м.н. **Яровая А. В.**, асп. **Поддубный А. А.**

*УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель*

Слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций широко используются в промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах. Достаточно часто встречаются балки и плиты, контактирующие с упругим основанием. В процессе их эксплуатации по ряду причин возможно появления зазора между конструкцией и основанием, из-за чего изменяется расчетная схема балки или плиты. При этом в слоях могут появиться неупругие деформации, а параметры напряженно-деформированного состояния резко измениться, что может привести к преждевременному разрушению конструкции.

**Расчетная схема.** Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная балка длиной  $l$  и размерами поперечного сечения  $h \times b_0$  (рисунок 1). Система координат  $x, y, z$  связана со срединной плоскостью заполнителя. Ось  $x$  направлена вдоль балки, ось  $z$  – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси  $z$ , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а заполнитель – третьим. Номер слоя обозначен индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

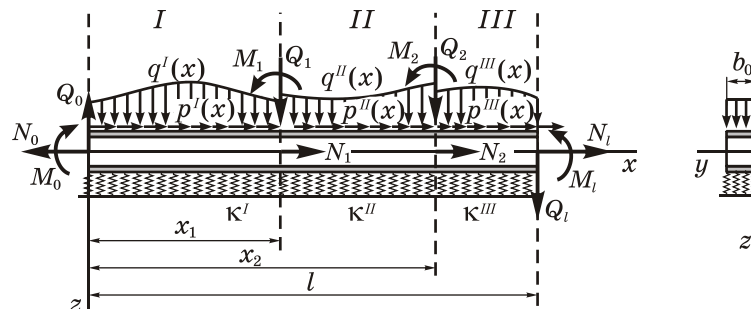


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной балки, частично опирающейся на упругое основание

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси  $y$ . На торцах балки (при  $x = 0$  и  $x = l$ ) действуют сосредоточенные силы и моменты  $N_0, Q_0, M_0$  и  $N_l, Q_l, M_l$ . К сечениям 1 ( $x = x_1$ ) и 2 ( $x = x_2$ ) приложены усилия  $N_1, Q_1, M_1$  и  $N_2, Q_2, M_2$ .

По длине балки выделяются три участка  $I$  ( $0 \leq x \leq x_1$ ),  $II$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ),  $III$  ( $x_2 \leq x \leq l$ ). Обозначим:  $p^n(x), q^n(x)$  – продольная и поперечная распределенные нагрузки на  $n$ -м участке ( $n = I, II, III$ );  $h_1^n, h_2^n, c^n$  – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины заполнителя на  $n$ -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Балка опирается на участки упругого основания различной жесткости, через  $\kappa^n$  обозначен коэффициент жесткости упругого основания на  $n$ -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии [1]: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной;

в несущих слоях она остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в заполнителе за счет сдвига поворачивается на дополнительный угол. Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Наружные несущие слои упругопластические, а несжимаемый по толщине заполнитель – нелинейно упругий.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомым величин приняты функции  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$  – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также  $\psi^n(x)$  – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на  $n$ -м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений. Для описания действия упругого основания на  $n$ -ом участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания  $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$ .

Заметим, что принятая расчетная схема может быть использована для трехслойной пластины, испытывающий цилиндрический изгиб.

**Уравнения равновесия в усилиях.** В работе [2] с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа были получены дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n{}_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n{}_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n{}_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \quad (1)$$

силовые граничные условия

$$\begin{aligned} N^I(0) = N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I{}_{,x}(0) = Q_0; \quad N^{III}(l) = N_l; \\ M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III}{}_{,x}(l) = Q_l; \quad H^I(0) = 0; \quad H^{III}(l) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I{}_{,x}(x_1) - M^{II}{}_{,x}(x_1) = Q_1; \\ H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2; \\ M^{II}{}_{,x}(x_2) - M^{III}{}_{,x}(x_2) = Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $N^n$ ,  $M^n$ ,  $Q^n$  – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила,  $H^n$  – дополнительный момент из-за сдвига в заполнителе, которые выражаются через усилия в слоях:

$$\begin{aligned} N^n = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \quad H^n = c^n (N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \\ N^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\ N^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\ N^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \quad Q^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $N^{(k)n}$ ,  $M^{(k)n}$  – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой  $x$  для  $k$ -го слоя;  $Q^{(3)n}$  – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя),  $b_0$  – ширина балки;  $\sigma_x^{(k)n}$ ,  $\sigma_{xz}^{(3)n}$  – компоненты тензора напряжений для  $k$ -го слоя.

**Физические уравнения.** В слоях балки используются физические уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ( $i, j = x, y, z$ ):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k f^{(k)n} \vartheta_{ij}^{(k)n}; \quad \sigma^{(k)n} = 3K_k 3\varepsilon^{(k)n}, \quad (5)$$

где  $s_{ij}^{(k)n}$ ,  $\vartheta_{ij}^{(k)n}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на  $n$ -м участке,  $\sigma^{(k)n}$ ,  $\varepsilon^{(k)n}$  – их шаровые части;  $G_k$ ,  $K_k$  – модуль сдвига и объемный модуль материала  $k$ -го слоя;  $f^{(1)n}$ ,  $f^{(2)n}$  – функции пластичности в несущих слоях;  $f^{(3)n}$  – функция нелинейности в заполнителе.

Функции пластичности и физической нелинейности в (5) удобно представить в виде

$$f^{(k)n} = 1 - \omega^{(k)n}; \quad \omega^{(k)n} < 1. \quad (6)$$

Аналитический вид функций  $\omega^{(k)n}$  в (6) для несущих слоев и заполнителя может быть принят согласно [3]. При этом если интенсивность деформаций  $\varepsilon_u^{(k)n}$  не превышает определенной величины (деформационного предел текучести  $\varepsilon_y^{(k)}$  в несущих слоях, предела физической нелинейности  $\varepsilon_{u0}^{(3)}$  в заполнителе), то  $\omega^{(k)n} = 0$ , а  $f^{(k)n} = 1$ .

**Уравнения равновесия для неупругой балки.** Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (5), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)n} &= s_x^{(k)n} + \sigma^{(k)n} = 2G_k \vartheta_x^{(k)n} + 3K_k \varepsilon^{(k)n} - 2G_k \vartheta_x^{(k)n} \omega^{(k)n}; \\ \sigma_{xz}^{(3)n} &= s_{xz}^{(3)n} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} - 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} \omega^{(3)n}. \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(k)n} = \sigma_x^{(k)ne} - \sigma_x^{(k)n\omega}; \quad \sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{xz}^{(3)ne} - \sigma_{xz}^{(3)n\omega};$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)ne} &= 2G_k \vartheta_x^{(k)n} + 3K_k \varepsilon^{(k)n}; \quad \sigma_x^{(k)n\omega} = 2G_k \vartheta_x^{(k)n} \omega^{(k)n}; \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n}; \quad \sigma_{xz}^{(3)n\omega} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)n} \omega^{(3)n}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (4), получим:

$$N^{(k)n} = N^{(k)ne} - N^{(k)n\omega}; \quad M^{(k)n} = M^{(k)ne} - M^{(k)n\omega}; \quad Q^{(3)n} = Q^{(3)ne} - Q^{(3)n\omega}. \quad (7)$$

Упругие составляющие в (7) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(1)ne} &= b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)ne} dz; \quad M^{(1)ne} = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)ne} z dz; \quad N^{(2)ne} = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)ne} dz; \quad M^{(2)ne} = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)ne} z dz; \\ N^{(3)ne} &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)ne} dz; \\ M^{(3)ne} &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)ne} z dz; \quad Q^{(3)ne} = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)ne} dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Неупругие составляющие в (7) определяются по формулам, аналогичным (8), в которых вместо индекса «e» указан индекс «ω».

Подставим внутренние усилия (7) в уравнения равновесия (1), граничные условия (2) и условия сопряжения участков (3). Получим следующие уравнения

$$N_{,x}^{ne} + b_0 p^n = N_{,x}^{n\omega}; \quad H_{,x}^n - Q^n = H_{,x}^{n\omega} - Q^{n\omega}; \quad M_{,xx}^{ne} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = M_{,xx}^{n\omega}, \quad (9)$$

силовые граничные условия

$$\begin{aligned}
N^{Ie}(0) &= N_0 + N^{I\omega}(0); \quad M^{Ie}(0) = M_0 + M^{I\omega}(0); \quad M^{Ie}_{,x}(0) = Q_0 + M^{I\omega}_{,x}(0); \\
N^{IIIe}(l) &= N_l + N^{III\omega}(l); \quad M^{IIIe}(l) = M_l + M^{III\omega}(l); \quad M^{IIIe}_{,x}(l) = Q_l + M^{III\omega}_{,x}(l); \\
H^{Ie}(0) &= H^{I\omega}(0); \quad H^{IIIe}(l) = H^{III\omega}(l)
\end{aligned}$$

условия для внутренних усилий в точке сопряжения участков, при  $x = x_1$

$$\begin{aligned}
N^{Ie}(x_1) - N^{IIIe}(x_1) &= N_1 + N^{I\omega}(x_1) - N^{III\omega}(x_1); \\
M^{Ie}(x_1) - M^{IIIe}(x_1) &= M_1 + M^{I\omega}(x_1) - M^{III\omega}(x_1); \\
M^{Ie}_{,x}(x_1) - M^{IIIe}_{,x}(x_1) &= Q_1 + M^{I\omega}_{,x}(x_1) - M^{III\omega}_{,x}(x_1); \\
H^{Ie}(x_1) - H^{IIIe}(x_1) &= H^{I\omega}(x_1) - H^{III\omega}(x_1);
\end{aligned}$$

и аналогично при  $x = x_2$ .

Здесь упругие и неупругие составляющие определяются выражениями

$$\begin{aligned}
N^{ne} &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)ne}; \quad M^{ne} = \sum_{k=1}^3 M^{(k)ne}; \quad Q^{ne} = Q^{(3)ne}; \\
H^{ne} &= c^n (N^{(1)ne} - N^{(2)ne}) + M^{(3)ne}, \quad N^{n\omega} = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n\omega}; \quad M^{n\omega} = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n\omega}; \\
Q^{n\omega} &= Q^{(3)n\omega}; \quad H^{n\omega} = c^n (N^{(1)n\omega} - N^{(2)n\omega}) + M^{(3)n\omega}.
\end{aligned}$$

**Уравнения равновесия в перемещениях.** Выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее упругие составляющие внутренних усилий через функции  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$ ,  $\psi^n(x)$ :

$$\begin{aligned}
N^{ne} &= b_0 (a_1^n u^n_{,x} + a_6^n \psi^n_{,x} - a_7^n w^n_{,xx}); \\
H^{ne} &= b_0 (a_6^n u^n_{,x} + a_2^n \psi^n_{,x} - a_3^n w^n_{,xx}); \\
Q^{ne} &= b_0 a_5^n \psi^n; \quad M^{ne} = b_0 (a_7^n u^n_{,x} + a_3^n \psi^n_{,x} - a_4^n w^n_{,xx}), \quad (10)
\end{aligned}$$

где  $a_1^n, \dots, a_7^n$  – параметры, характеризующие свойства слоев на  $n$ -м участке.

Подставим выражения (10) в уравнения (9). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия трехслойной балки в перемещениях. Для  $n$ -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned}
a_1^n u^n_{,xx} + a_6^n \psi^n_{,xx} - a_7^n w^n_{,xxx} &= -p^n + p_\omega^n, \\
a_6^n u^n_{,xx} + a_2^n \psi^n_{,xx} - a_3^n w^n_{,xxx} - a_5^n \psi^n &= h_\omega^n, \\
a_7^n u^n_{,xxx} + a_3^n \psi^n_{,xxx} - a_4^n w^n_{,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n + q_\omega^n, \quad (11)
\end{aligned}$$

где  $p_\omega^n = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{n\omega}$ ;  $h_\omega^n = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{n\omega} - Q^{n\omega})$ ;  $q_\omega^n = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{n\omega}$ .

Если  $n$ -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (11) будет следующим:

$$a_7^n u^n_{,xxx} + a_3^n \psi^n_{,xxx} - a_4^n w^n_{,xxxx} = -q^n + q_\omega^n.$$

Точное решение систем уравнений для участков, связанных и не связанных с упругим основанием, получить нельзя. Поэтому воспользуемся методом «упругих» решений Ильюшина, который распространим на слоистую балку.

Предположим, что в (11) содержится малый параметр, например, все  $\omega^{(k)n} < 1$ . Тогда возможен метод итераций, при котором для любого  $m$ -го приближения получаем системы уравнений:

для участка балки на упругом основании

$$\begin{aligned} a_1^n u_{,xx}^{n(m)} + a_6^n \psi_{,xx}^{n(m)} - a_7^n w_{,xxx}^{n(m)} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u_{,xx}^{n(m)} + a_2^n \psi_{,xx}^{n(m)} - a_3^n w_{,xxx}^{n(m)} - a_5^n \psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u_{,xxx}^{n(m)} + a_3^n \psi_{,xxx}^{n(m)} - a_4^n w_{,xxx}^{n(m)} - \kappa^n w^{n(m)} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

для участка балки без упругого основания

$$\begin{aligned} a_1^n u_{,xx}^{n(m)} + a_6^n \psi_{,xx}^{n(m)} - a_7^n w_{,xxx}^{n(m)} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u_{,xx}^{n(m)} + a_2^n \psi_{,xx}^{n(m)} - a_3^n w_{,xxx}^{n(m)} - a_5^n \psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u_{,xxx}^{n(m)} + a_3^n \psi_{,xxx}^{n(m)} - a_4^n w_{,xxx}^{n(m)} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $p_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{n\omega(m-1)}$ ;  $h_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{n\omega(m-1)} - Q^{n\omega(m-1)})$ ;  $q_\omega^{n(m-1)} = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{n\omega(m-1)}$ .

Величины  $p_\omega^{n(m-1)}$ ,  $h_\omega^{n(m-1)}$ ,  $q_\omega^{n(m-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ( $m = 1$ ) принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних нагрузок»*. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев.

Применение метода последовательных приближений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «нагрузками».

Процедура получения решения систем уравнений (11), (12) не отличается от примененной в [2] для упругой балки. В результате получаем искомые функции перемещений в рекуррентном виде.

Для  $n$ -го участка, связанного с *упругим основанием малой или большой жесткости*

$$\begin{aligned} w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^{n(m)}; \\ \psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^{n(m)}; \\ u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^{n(m)} b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^{n(m)} b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^{n(m)} b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^{n(m)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для  $n$ -го участка, на *упругом основании средней жесткости*

$$\begin{aligned}
w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^{n(m)}; \\
\psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^{n(m)}; \\
u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^n + C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^{n(m)}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Если  $n$ -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned}
\psi^{n(m)} &= C_1^{n(m)} b_{11}^n + C_2^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^{n(m)}; \\
w^{n(m)} &= C_1^{n(m)} (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + \\
&\quad + C_3^{n(m)} b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^{n(m)} x^2 / 2 + C_5^{n(m)} x + C_6^{n(m)} + g_2^{n(m)}; \\
u^{n(m)} &= C_1^{n(m)} (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^{n(m)} b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + \\
&\quad + C_4^{n(m)} \alpha_{13}^n x + C_5^{n(m)} \alpha_{13}^n + C_7^{n(m)} x + C_8^{n(m)} + g_3^{n(m)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

В выражениях (13)–(15)  $C_1^{n(m)}, \dots, C_9^{n(m)}$  – константы интегрирования,  $w_p^{n(m)}$  – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты  $b_i^n, \alpha_i^n, \beta_i^n$  выражаются через параметры  $a_i^n$ , а функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
f_1^{n(m)} &= \alpha_8^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{10}^n \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx + \alpha_{11}^n (p^n - p_\omega^{n(m-1)}); \\
f_2^{n(m)}(x) &= \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{13}^n w_p^{n(m)},_{,x} + \\
&\quad + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) + \alpha_{14}^n \iint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx; \\
g_1^{n(m)}(x) &= b_{12}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left( \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx \right) dx - \\
&\quad - b_{12}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left( \int (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx \right) dx + \\
&\quad + b_{13}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx - b_{13}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx; \\
g_2^{n(m)}(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^{n(m)} dx + \alpha_{18}^n \iiint (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx; \\
g_3^{n(m)}(x) &= b_{18}^n g_1^{n(m)}(x) + b_{19}^n g_2^{n(m)}(x) + \\
&\quad + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint (q^n - q_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx + b_{20}^n \iiint (p^n - p_\omega^{n(m-1)}) dx dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования учитываются граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом, которые также используются в итерационном виде.

**Результаты и выводы.** При численной реализации полученного решения величина нагрузки и относительные толщины слоев подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени. Аналитический вид функций пластичности и нелинейности, механические

характеристики материалов несущих слоев и для заполнителя принимались в соответствии с [3].

Метод последовательных приближений показал достаточно хорошую практическую сходимость. За искомое решение принято 12-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1 % – как для прогибов  $w$ , так и для сдвигов  $\psi$ . Также была проведена численная проверка удовлетворения третьего из уравнений равновесия систем (11), (12). Полученные результаты свидетельствуют об удовлетворительном выполнении основного из уравнений равновесия, чем подтверждают достаточную точность и достоверность представленных числовых результатов.

Анализируя величины прогибов и нормальных напряжений для упругой и неупругой балок, можно сказать, что учет нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению максимальных перемещений на 50 %, а напряжений – до 20 %. Это необходимо учитывать при проектировании слоистых элементов конструкций, так как во многих случаях они являются элементами сложных и ответственных сооружений.

### РЕЗЮМЕ

Рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. Наружные несущие слои упругопластические, заполнитель – нелинейно упругий. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в итерациях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Проведено сравнение числовых значений перемещений и напряжений для упругой и неупругой балок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
2. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2014. – №29. – С. 141-147.
3. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.

### SUMMARY

*Bending sandwich beam under distributed and concentrated loads at partial contact with the elastic base. Outer bearing layers of elastic plastic, filler - nonlinear elasticity. A system of differential equations of equilibrium, its analytical solution is obtained in the iteration, the boundary conditions are written and conjugation conditions on the boundary. The comparison of the numerical values of displacements and stresses for the elastic and inelastic beams.*

**E-mail:** [a-xalio@yandex.ru](mailto:a-xalio@yandex.ru)  
[aleksey-podd@yandex.ru](mailto:aleksey-podd@yandex.ru)

Поступила в редакцию 03.11.2014