УДК 539.3

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

асп. **Маевская С.С.**

Витебский государственный универститет им. П.М. Машерова, Витебск

Слоистые тонкостенные конструкции имеют широкий спектр применения в качестве элементов многих инженерных сооружений, таких как воздушные и космические транспортные средства, подводные объекты, автомобили и т.п. ([1],[2]). Во всех перечисленных отраслях промышленности тонкостенным конструкциям приходится испытывать внешние колебательные нагрузки, поэтому виброзащита подобных конструкций является предметом практического интереса для механиков. С появлением группы новых композитных материалов, имеющих активные и адаптивные свойства, становится возможным решение многих проблем.

Среди класса «интеллектуальных» материалов особое внимание можно обратить на магнитореологический эластомер (МРЭ). Он состоит из магнитных частиц в деформированной полимерной матрице и его упругие свойства изменяются в зависимости от величины приложенного магнитного поля ([3],[4]). Наличие возможности управлять в широком диапазоне вязкоупругими и вязкопластическими свойствами МРЭ позволяет использовать его в устройствах, предназначенных для виброзащиты.

Идея использовать электрореологические и магнитореологические среды в качестве промежуточного материала в тонкостенных конструкциях, как один из методов виброзащиты, не является новым. Однако работ по расчету подобных многослойных структур мало, поскольку данная задача является сложной для механиков, занимающихся разработкой новых методов активного и полуактивного гашения строительных вибраций. Большинство работ по подавлению вибраций многослойных тонкостенных конструкций были сделаны для случая, когда в качестве прослойки был выбран «интеллектуальный» материал в виде жидкости ([5],[6],[7],[8]). Эластромеры же, по сравнению с жидкостями, обладает преимуществом, поскольку при низком уровне магнитного поля сохраняют необходимую геометрическую форму.

Целью данной работы является исследование возможности эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы свободных осесимметричных поперечных колебаний круглой трехслойной пластины, содержащей МРЭ.

Рассмотрим круглую трехслойную пластину, у которой внешние слои не восприимчивы к магнитному полю, а внутренний слой представляет собой МРЭ. Используется цилиндрическая система координат r, θ, z, связанная с серединной плоскостью заполнителя. Для исследования свободных поперечных колебаний круглой пластины будем использовать систему дифференциальных уравнений в частных производных, приведенную в работе [9]:

$$
\begin{cases}
L_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 \dfrac{\partial w}{\partial r}) = 0; \\
L_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 \dfrac{\partial w}{\partial r}) = 0; \\
L_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 \dfrac{\partial w}{\partial r}) - M_0 \ddot{w} = 0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы; $\mathrm{M}_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)\cdot r^2$; a_i – коэффициенты,

$$
a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+ \, ; a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) ; \; K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k ; \; K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k ;
$$

$$
a_3 = h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ ; \; a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+) ;
$$

$$
a_5 = c\left[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+ \right];
$$

$$
a_6 = h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+ ;
$$

$$
L_2(g) \equiv (\frac{1}{r}(rg),_r),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2} ;
$$

$$
L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g)),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3} ;
$$

$G_k = \dfrac{E_k}{2(1+\nu_k)}$, $K_k = \dfrac{E_k}{3(1-2\nu_k)}$ – модули сдвига и объемной деформации материала k-го слоя, h_1, h_2 – толщины несущих упругих слоев, $h_3 = 2c$ – толщина внутреннего вязкоупругого слоя, изготовленного из МРЭ, $w(r,t)$– прогиб пластины, $u(r,t)$ – радиальное перемещение координатной поверхности, $\psi(r,t)$ – относительный сдвиг в заполнителе, t – время.

В качестве граничных условий использовались условия шарнирного опирания. После некоторых преобразований приводим систему (1) к виду:

$$
\begin{cases}
u = b_1 w,_r + C_1 r + \dfrac{C_2}{r}; \\
\psi = b_2 w,_r + C_3 r + \dfrac{C_4}{r}; \\
L_3(w,_r) + M^4 \ddot{w} = 0,
\end{cases}
\tag{2}
$$

где

$$
b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2} ; \; b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} ; \; M^4 = M_0 D ;
$$

$$
D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2} .
\tag{3}
$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин положим $C_2 = C_4 = 0$.
Прогиб примем в виде

$$w(r,t) = \upsilon(r)(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{4}$$

где A и B – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, ω – частота собственных колебаний пластины, $\upsilon(r)$ – неизвестная координатная функция.

Подставим выражение (4) в последнее уравнение из системы (2). В результате получим бибесселево уравнение, определяющее координаты функции $\upsilon(r)$:

$$L_3(\upsilon,_r) - \beta^4\upsilon = 0, \tag{5}$$

где

$$\beta^4 = M^4\omega^2. \tag{6}$$

Решение уравнения (4) представим в виде [10]

$$\upsilon(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r), \tag{7}$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и функция Макдональда нулевого порядка; C_5, C_6, C_7, C_8 – константы интегрирования. Поскольку $Y_0(\beta r), K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат (в центре пластины) [11], то $C_7 = C_8 = 0$.

При шарнирном опирании контура пластины и наличием на нем жесткой диафрагмы должны выполняться условия $u = \psi = \omega = M_r = 0$ [12],

где в случае осесимметричных колебаний $M_r = -D(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\upsilon}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r})$.

Тогда определить собственные числа можно из уравнения [9]:

$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta)} = -\frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8 I_1(\beta)}, \tag{8}$$

где

$$a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2,\ a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2,$$

$$a_{60} = a_6\{K_k^- \to K_k^+\}.$$

Из уравнения (8) можно определить собственные числа β_n (n = 0, 1, 2, …). После их вычисления частоты собственных колебаний можно найти из соотношения (6) с учетом (3):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}. \tag{9}$$

Пример. В качестве примера рассмотрим круглую трехслойную пластину с параметрами $h_1 = h_3 = 0{,}0005 м$; $h_2 = 0{,}01 м$; $r = 0{,}5 м$; $\nu_1 = \nu_3 = 0{,}4$; $\nu_2 = 0{,}42$; $E_1 = E_3 = 1{,}5\cdot10^9\ Па$; $\rho_1 = \rho_3 = 1{,}4\cdot10^3\ кг/м^3$ в случае, когда внутренний слой изготовлен из МРЭ плотностью $\rho_2 = 2{,}65\cdot10^3\ кг/м^3$. Для определения E_2 и G_2 были использованы результаты экспериментально установленных зависимостей этих параметров от индукции магнитного поля [13].

На рис. 1 и 2 показаны зависимости собственной частоты и декремента колебаний, соответствующие различным модам от интенсивности магнитного поля.

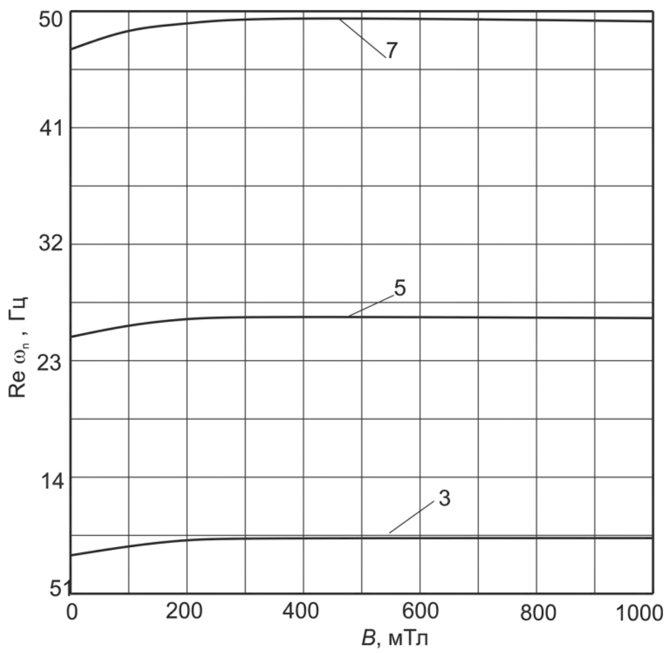

Рисунок 1. – Собственные частоты Reω_n для 3,5 и 7 мод

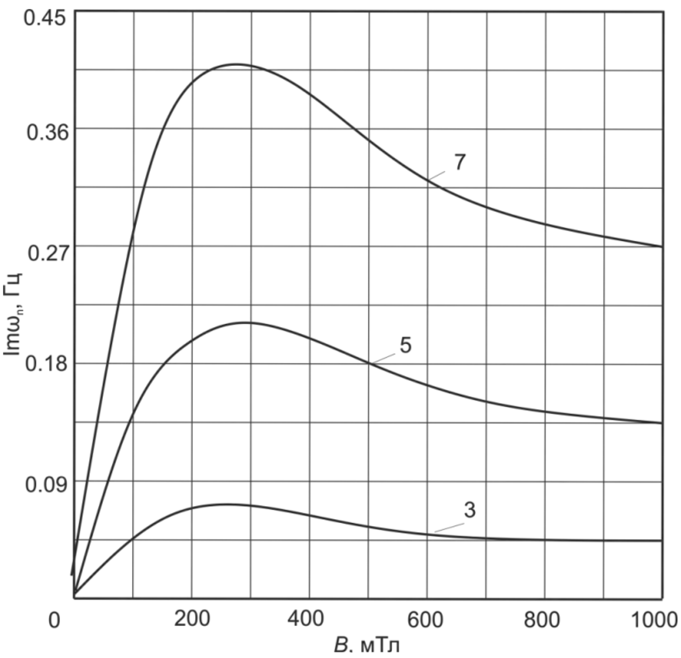

Рисунок 2. – Декремент Imω_n для 3,5 и 7 мод

Из рис. 1 видно, что увеличение индукции магнитного поля приводит к незначительному росту собственных частот колебаний, что объясняется слабой зависимостью действительной части приведенного модуля упругости слоистой пластины от индукции магнитного поля. Из рис. 2 видно, что для всех рассмотренных мод декремент колебаний $\mathrm{Im}\omega_n$ возрастает с увеличением индукции магнитного поля до уровня $B \approx 300 мТл$, дальнейшее увеличение интенсивности магнитного поля приводит к некоторому уменьшению параметра $\mathrm{Im}\omega_n$, что является результатом «насыщения» МРЭ [13].

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются свободные осесимметричные поперечные колебания круглой трехслойной пластины, содержащей магнитореологический эластомер. Анализируется

влияние внешнего постоянного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний, соответствующие различным модам пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells. / A. Korjakin [et al.] // Composite Structures. – 1998. – №41. – P. 39–47.
2. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / M.S. Qatu // Composite Structures. – 2010. – № 93(1). - P. 14–31.
3. Jolly, M.R. Properties and applications of comerciaal magnetorheological fluids / M.R Jolly, J.W. Bender, D.J. Carlson // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1999. – №10. – P 5–13.
4. Ginder, G.M. Rheology controlled by magnetic fields / G.M Ginder // Encyclopedia of Applied Physics. – 1996. – Vol.16. – P. 487–503.
5. Park, D.W. Shape control of an electrorheological fluid based smart plate / D.W. Park, S.B. Choi, S.B. Jung // Proc. SPIE. 3329. – 1998. – P. 824–835.
6. Shaw, J. Hybrid control of cantilevered ER sandwich beam for vibration suppression. / J. Shaw //J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2000. – № 11. – P. 26–31.
7. Yalcintas, M. Magnetoreological and electroreological materials in adaptive structures and their perfomance comparision / M. Yalcintas, H. Dai // J. Smart Mater. Struct. – 1999. - № 8. – P. 560–573.
8. Yeh, J.-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer / J.-Y. Yeh // Aerospace Science and Technology. – 2008 doi:10.1016/j.jsv.2008.02.012.
9. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576с.
10. Горшков, А.Г. Динамические контактные задачи с подвижными торцами / А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
11. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш – М.: Наука, 1979. – 342 с.
12. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416с.
13. Korobko, E.V. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological Elastomer / E.V. Korobko, Z.A. Novikova, M.A. Zhurauski, G.I. Mikhasev // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2012. – Vol. 23, №. 9. – P. 1019 – 1023.

SUMMARY

Free axisymmetric transverse vibrations of a circular sandwich plate containing magnetorheological elastomer are considered. Influence of the external stationary magnetic field on the natural frequencies and damping rate fluctuations corresponding to different modes of the plate is analyzed.

E-mail: svetlanamaevsckaya@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.11.2014