УДК 531.10:621.01

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ ПО МЕТОДУ ШТАЕРМАНА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ МЕХАНИЗМОВ

к.т.н. **Авсиевич А.М., Пронкевич С.А.,** студ. **Шашко А.Е.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Распределение контактных давлений по рабочим поверхностям подвижных сопряжений за цикл работы механизма является основой для оптимизации его конструктивных параметров. Для расчета распределения контактных давлений по цилиндрическим поверхностям вращательных кинематических пар решена задача И.Я. Штаермана о внутреннем контакте тел с согласованными цилиндрическими поверхностями [1].

Звено нагружено сосредоточенной силой *F*, которая в механизме является силой реакции в кинематической паре. При этом на дуге 1-ого звена для произвольной угловой координаты $\varphi'(-\varphi_0 \le \varphi' \le \varphi_0)$, возникает контактное давление $p_i \varphi_i'$, которое необходимо определить для неизвестного полуугла контакта φ_0.

При расчете полуугла контакта и эпюры контактного давления принимается допущение, что сопряженные звенья находятся в равновесии. Такое допущение является корректным, так как действие сил инерции учитывается при расчете сил реакций, реализованном методом кинетостатики, а пластические деформации и течение металла в зоне контакта в исследуемом диапазоне режимов отсутствуют.

Расчет производим методом конечных разностей. Метод заключается в том, что искомая функция предполагается изменяемой не непрерывно, а скачками. Разбив интервал изменения искомой функции на *n* частей и предполагая, что в каждом из полученных подинтервалов функция эта сохраняет постоянное значение, мы сводим решение интегрального уравнение к отысканию этих *n* значений искомой функции. Надлежащим выбором этих значений мы можем добиться того, чтобы интегральное уравнение удовлетворялось в *n* точках того интервала, в котором это уравнение должно удовлетворяться. Мы приходим, таким образом, к решению системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Решив эти уравнения, мы получим приближѐнное выражение для искомой функции в виде кусочно-постоянной функции, меняющейся скачками. Построив еѐ график и сгладив скачки, мы получим в итоге плавную кривую, изображающую приближенное решение интегрального уравнения.

Как представлено выше, в случае сжатия двух круговых цилиндров, радиусы которых почти равны, давление $P(\theta)$ в области контакта определяем интегральным уравнением

$$\begin{aligned}
&2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)\int_0^{\varphi_0} p(\varphi')[\cos(\varphi-\varphi')\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)+\\
&+\cos(\varphi+\varphi')\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)-2\cos\varphi\cos\varphi'\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi'-\\
&-(\chi_1 r_1+\chi_2 r_2)\int_0^{\varphi_0} p(\varphi')[\sin(\varphi-\varphi')+\sin(\varphi+\varphi')-\\
&-2\cos(\varphi)\sin\varphi']d\varphi'+4\vartheta_1 r_1(1-\cos\varphi)\int_0^{\varphi_0} p(\varphi')d\varphi' = (r_2-r_1)(1-\cos\varphi)
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\vartheta_1 = \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{4\pi\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}$, $\vartheta_2 = \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}$, $\chi_1 = \dfrac{1}{4(\lambda_1 + \mu_1)}$, $\chi_2 = \dfrac{1}{4(\lambda_2 + \mu_2)}$

λ_1, λ_2 – коэффициенты Ламе для материала тел 1 и 2 соответственно, выражаемые через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, μ_1, μ_2 - коэффициенты Пуассона.

Разобьем интервал (0, φ_0) на n равных частей и будем считать, что в каждом из полученных подинтервалов функция $P(\theta)$ сохраняет постоянное значение

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\varphi) = \mathrm{P}_k \ при (\mathrm{k}-1)\vartheta < \varphi < k\vartheta, \\ &k = 1, 2, ..., \mathrm{n}, \vartheta = \frac{\varphi_0}{n} \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя $P(\theta)$ из (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned} &2(\vartheta_1 \mathrm{r}_1 + \vartheta_2 \mathrm{r}_2)\sum_{k=1}^{n} P_k \int\limits_{(\mathrm{k}-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\cos(\varphi - \varphi')\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) + \\ &+\cos(\varphi + \varphi')\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) - 2\cos\varphi\cos\varphi'\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi' - \\ &-(\chi_1 \mathrm{r}_1 + \chi_2 \mathrm{r}_2)\sum_{k=1}^{n} P_k \int\limits_{(\mathrm{k}-1)\vartheta}^{k\vartheta} [\sin(\varphi - \varphi') + \sin(\varphi + \varphi') - \\ &-2\cos(\varphi)\sin\varphi']d\varphi' + 4\vartheta_1 \mathrm{r}_1(1 - \cos\varphi)\sum_{k=1}^{n} P_k \int\limits_{(\mathrm{k}-1)\vartheta}^{k\vartheta} d\varphi' = (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi), \\ &-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Delta_k = {} & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)\left[\sin(k+1)\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{(k+1)\vartheta}{2}\right)\right) - \sin k\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{k\vartheta}{2}\right)\right) - \vartheta\right] + \\ & + (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2)\delta(k)[\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда уравнению можно будет придать вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k+1}^{m} p_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2\cos(l\vartheta)\Delta_{k-1}) = (r_2 - r_1)(1 - \cos\varphi) \\ &l = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{5}$$

Так как

$$\delta(1 + \mathrm{k} - 1) = \delta(\mathrm{k} - 1) = 1 при k \geq 1, 1 \geq 1$$

При k≥0 имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_k = {} & 2(\vartheta_1 r_1 + \vartheta_2 r_2)\left[\sin(k+1)\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{(k+1)\vartheta}{2}\right)\right) - \sin k\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{k\vartheta}{2}\right)\right) - \vartheta\right] + \\ & + (\chi_1 r_1 + \chi_2 r_2)[\cos(k+1)\vartheta - \cos k\vartheta] + 2\vartheta_1 r_1 \vartheta \end{aligned} \tag{6}$$

При k≥1 имеем также

$$\Delta_{-k}=2(\vartheta_1 r_1+\vartheta_2 r_2)\left[-\sin(k-1)\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{(k-1)\vartheta}{2}\right)\right)-\sin k\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{k\vartheta}{2}\right)\right)-\vartheta\right]+$$
$$+(\chi_1 r_1+\chi_2 r_2)[-\cos(k-1)\vartheta+\cos k\vartheta]+2\vartheta_1 r_1\vartheta \qquad (7)$$

т.е. $\Delta_{-k}=\Delta_{k+1}, k\geq 1$

Вводя, далее, обозначения:

$$F(\mathrm{k})=2(\vartheta_1 \mathrm{r}_1+\vartheta_2 \mathrm{r}_2)\left[\sin(\mathrm{k}\,\vartheta)\ln\left(\mathrm{tg}\frac{(\mathrm{k}\,\vartheta)}{2}\right)-k\vartheta\right]+$$
$$+(\chi_1 \mathrm{r}_1+\chi_2 \mathrm{r}_2)\cos(\mathrm{k}\,\vartheta)+2\vartheta_1 \mathrm{r}_1 k\vartheta\_\mathrm{k}\geq 0, \qquad (8)$$

сможем придать формуле вид:

$$\Delta=F(k+1)-F(k), k\geq 1 \qquad (9)$$

Объединив формулы (5), (7), (8), (9), приходим к следующей системе уравнений для определения неизвестных p_1, p_2, …., p_k.

$$\begin{cases}\sum_{k+1}^{m} p_k(\Delta_{l-k}+\Delta_{l+k-1}-2\cos(l\vartheta)\Delta_{k-1})=(r_2-r_1)(1-\cos\varphi)\\ l=1,2,\ldots\ldots,n,\\ \textit{где}\\ \Delta=F(k+1)-F(k), k\geq 0, \Delta_{-k}=\Delta_{k+1}, k\geq 1\\ F(k)=2(\vartheta_1 r_1+\vartheta_2 r_2)\left[\sin(k)\vartheta\ln\left(tg\left(\frac{k\vartheta}{2}\right)\right)-k\vartheta\right]+\\ +(\chi_1 r_1+\chi_2 r_2)\cos k\vartheta+2\vartheta_1 r_1\vartheta, k\geq 0\end{cases} \qquad (10)$$

В программной реализации данного алгоритма создаются два главных массива – коэффициентов перед p_i и свободных членов.

Разбиваем шатунную шейку на 360 равных частей. Это делается для того, чтобы в дальнейшем посчитать напряжение на каждом участке шатунной шейки. Создаем главную таблицу, в которой будут храниться значения напряжения на каждом участке, и заполняем ее. Далее суммируем столбцы для получения значений суммарного напряжения на участках поверхности.

В качестве критерия оценки износостойкости и энергоэффективности механизма можно выбрать элементарную работу трения, совершаемую на малом элементарном участке поверхности или соответствующую элементарную мощность трения в данный момент цикла работы машины [2]. Наиболее удобным для расчетов и последующей визуализации показателем будет являться параметр износа Z или «аналог мощности трения» – произведение контактного давления на элементарном участке поверхности на аналог относительной угловой скорости скольжения. Для поверхностей пары трения «шатунная шейка-вкладыш» вычисляется как

$$Z_{ji}=\sigma_{ji}\cdot\frac{\omega_{2i}-\omega_{1i}}{\omega_{1i}}, \qquad (11)$$

где Z_{ji} и σ_{ji} соответственно – параметр износа и контактное давление (напряжение) для j-го элемента поверхности в i-й момент цикла,

ω_{2i} и ω_{1i} - угловые скорости звеньев 2 и 1 в i-й момент цикла.

Значения угловых скоростей в каждый момент цикла работы машины рассчитаны ранее в программе для определения сил реакций в механизме. В программе для расчета контактных давлений создаем еще одну таблицу для параметра износа и заполняем ее. Аналогично создаѐм таблицу для параметра износа на отдельных частях шатунной шейки и заполняем ее путем суммирования столбцов.

Описанный алгоритм и его программная реализация в совокупности с программой расчета сил реакций в кинематических парах образуют комплекс, позволяющий производить оптимизацию конструктивных параметров механизмов по критериям минимизации нагруженности и изнашивания при различных режимах работы.

РЕЗЮМЕ

В работе описан алгоритм расчета распределения контактных давлений по поверхностям вращательных кинематических пар. Предложен критерий оценки относительной интенсивности изнашивания механизма с определенными конструктивными параметрами. Описанный алгоритм вместе с программой расчета сил реакций в кинематических парах позволяют производить оптимизацию конструктивных параметров механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для втузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.

SUMMARY

The paper describes the algorithm for calculating the distribution of the contact pressure on the surface of rotation kinematic pairs. Evaluation criterion for relative intensity of wear of the mechanism with certain design parameters is proposed. The described algorithm together with the program of the calculation of the forces of reaction in kinematic pairs allows optimizing the design parameters of the mechanism.

E-mail: ausi@tut.by

Поступила в редакцию 03.11.2014