$$(EJ_{xy})_c = E_1 \int\limits_{A_1} x_1 y_1 \mathrm{d}A_1 + E_2 \int\limits_{A_2} x_2 y_2 \mathrm{d}A_2. \qquad (9)$$

Интегралы в формулах (7) и (8) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (9) – центробежные моменты инерции. Поэтому формулы (7) – (9) можно представить в виде

$$(EJ_x)_c = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2}; \qquad (10)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2}; \qquad (11)$$

$$(EJ_{xy})_c = E_1 J_{x1y1} + E_2 J_{x2y2}. \qquad (12)$$

Если стержень собран из *n* стержней из различных материалов, то формулы (10) – (12) можно представить в виде:

$$(EJ_x)_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xi}; \quad (EJ_y)_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{yi}; \quad (EJ_{xy})_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xiyi}.$$

Суммарные осевые жесткости сечений всегда будут положительны, а центробежная суммарная жесткость может быть положительной, отрицательной и иметь нулевое значение.

*Литература*

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов, / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1972 – 541с.
2. Сопротивление материалов, / Г.С. Писаренко [и др.] – Киев: Техника, 1967 – 783с.
3. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов, / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.

**УДК 621.762.4**

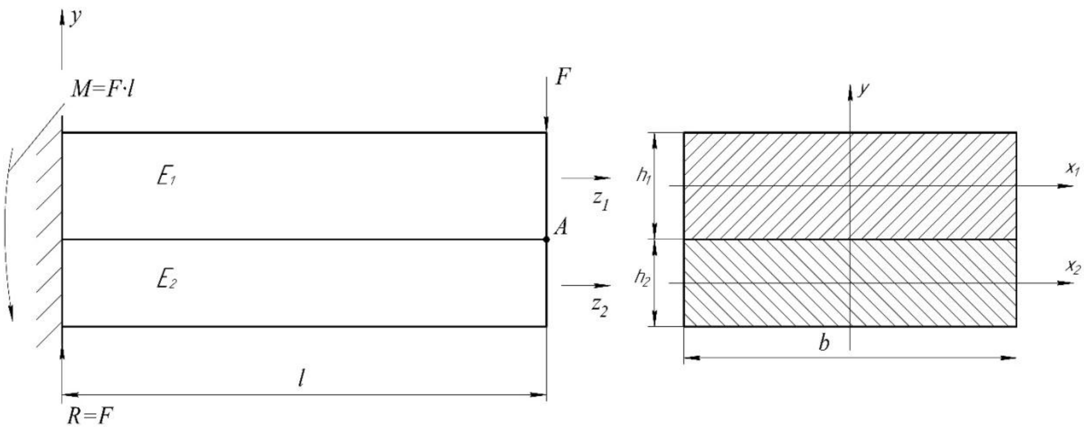
# НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СТЕРЖНЕЙ

Студенты группы 10106222 М. А. Вечорко, С. С. Мычко
*Научные руководители – профессор Дудяк А. И.*
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

*Рассмотрен вопрос определения нормальных напряжений в консольной балке, состоящей из ряда разнородных стержней, не*

*связанных между собой и нагруженных общей нагрузкой. Получена формула, позволяющая определять напряжение в сечении любого стержня в зависимости от его модуля продольной упругости и суммарной жесткости пакета стержней.*

Сравним абсолютные величины максимальных нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях консоли, составленной из двух стержней из разнородных материалов, отличающихся модулями продольной упругости $E_1 \neq E_2$ (рисунок 1). Поперечные сечения имеют форму прямоугольников одинаковой ширины, но разной высоты ($h_1 \neq h_2$).




*а* *б*

Рисунок 1. – Схема нагружения консоли (*а*) и поперечное сечение (*б*)

При поперечном изгибе такой консоли каждый стержень изгибается самостоятельно под действием силы $F$ (см. рисунок 1). Внешняя сила $F$ одновременно действует на оба стержня с различной интенсивностью, которую можно разделить на две составляющие $F_1$ и $F_2$ (рисунок 2). Обозначим через $F_1$ силу, действующую на верхний стержень, а через $F_2$ – силу, действующую на нижний стержень. Поэтому силу $F$ можно представить как сумму сил:

$$F = F_1 + F_2. \quad (1)$$

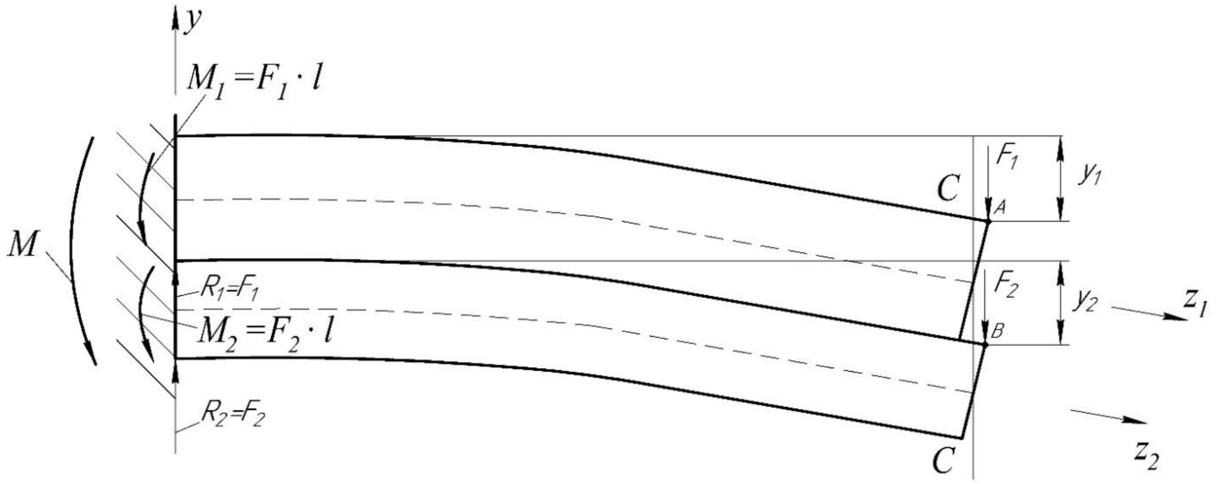



Рисунок 2. – Схема деформации консоли

Из приведенной схемы деформации консоли можно сделать заключение, что вертикальные прогибы точки $A$ и точки $B$ на концах консоли будут одинаковы:

$$y_1 = y_2. \tag{2}$$

Под действием силы $F_1$ в заделке возникают реактивный изгибающий момент $M_1 = F_1 \cdot l$ и реакция $R_1 = F_1$, а под действием силы $F_2$ – реактивный изгибающий момент $M_2 = F_2 \cdot l$ и реакция $R_2 = F_2$ (см. рисунок 2).

$$y_1 = \frac{1}{E_1 J_{x1}} \left\lfloor R_1 \frac{l^3}{6} - M_1 \frac{l^2}{2} \right\rfloor = -\frac{F_1 l^3}{3E_1 J_{x1}}; \tag{3}$$

$$y_2 = \frac{1}{E_2 J_{x2}} \left\lfloor R_2 \frac{l^3}{6} - M_2 \frac{l^2}{2} \right\rfloor = -\frac{F_2 l^3}{3E_2 J_{x2}}, \tag{4}$$

где $J_{x1} = \dfrac{bh_1^3}{12}$ и $J_{x2} = \dfrac{bh_2^3}{12}$ – осевые моменты инерции сечений стержней.

Подставив правые части уравнений (3) и (4) в равенство (2) найдем соотношение между силами $F_1$ и $F_2$, выраженное через жесткости стержней при изгибе:

$$F_1 = \frac{E_1 J_{x1}}{E_2 J_{x2}} F_2. \tag{5}$$

Подставив полученное значение силы $F_1$ (5) в равенство (1) и решая относительно $F_2$, получим

$$F_2 = \frac{E_2 J_{x2} F}{E_1 J_{x1} + E_2 J_{X2}} = \frac{E_2 J_{x2} F}{(EJ_x)_c}, \tag{6}$$

где $(EJ_x)_c = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2}$ – суммарная жесткость консольной балки.

Подставив значение $F_2$ (6) в формулу (5), получим

$$F_1 = \frac{E_1 J_{x1}}{E_2 J_{x2}} \cdot \frac{E_2 J_{x2} F}{(EJ_x)_c} = \frac{E_1 J_{x1} F}{(EJ_x)_c}.$$

Нормальные напряжения, действующие в стержнях, определяют из выражений

$$\sigma_1 = \frac{F_1 l}{J_{x1}} y_1 = \frac{E_1 \left(Fl\right)}{(EJ_x)_c} y_1 = \frac{E_1 M}{(EJ_x)_c} y_1;$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2 l}{J_{x2}} y_2 = \frac{E_2 \left(Fl\right)}{(EJ_x)_c} y_2 = \frac{E_2 M}{(EJ_x)_c} y_2,$$

где $M$ – изгибающий момент в заделке от действия полной силы $F$;

$y_1$ и $y_2$ – координаты в соответствующих стержнях, где определяют нормальные напряжения.

В любой балке, составленной из $n$ стержней, формулу для определения нормальных напряжений, возникающих в стержнях, можно представить следующим образом:

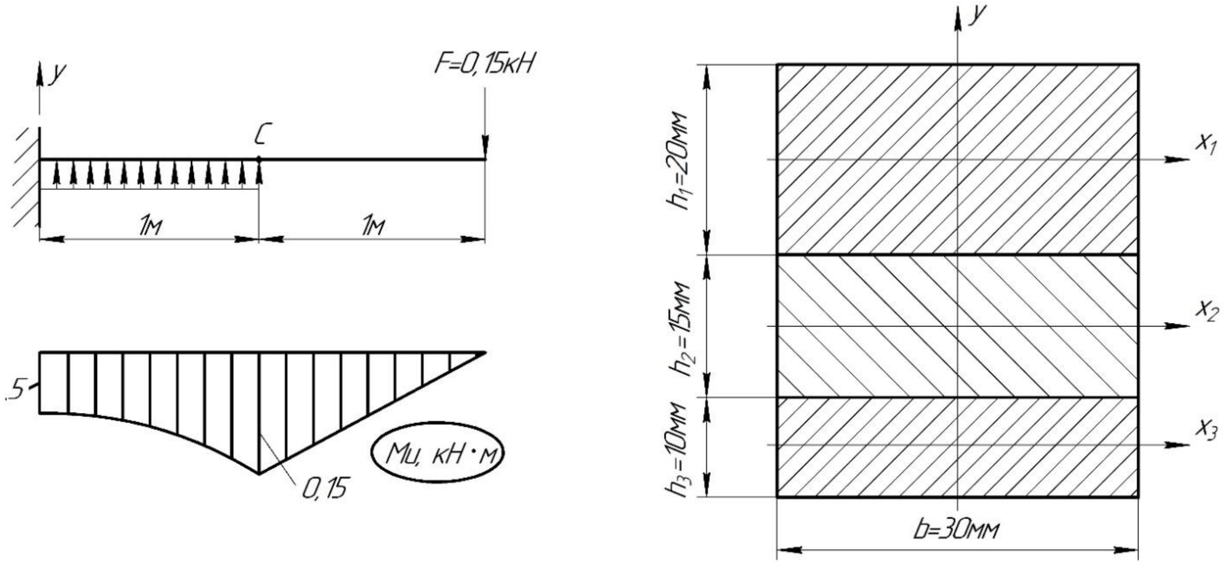
$$\sigma_i = \frac{E_i M_u}{(EJ_x)_c} y_i, \tag{7}$$

где: $E_i$ – модуль продольной упругости материала стержня, в котором определяют напряжения;

$M_u$ – изгибающий момент, действующий в сечении, в котором определяют напряжения.

Формула (7) справедлива для любых типов балок и позволяет определять нормальные напряжения в поперечных сечениях отдельных частей стержней при известном из эпюры полным изгибающим моментом $M_u$, действующим на весь пакет стержней.

**Пример:** Консольная балка состоит из стального, алюминиевого и медного стержней и подвергается поперечному изгибу сосредоточенной силой $F =$ 0,15 кН и распределенной нагрузкой $q =$ 0,5 кН/м. Определить максимальные напряжения в стержнях. Модуль продольной упругости для стали принять $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, для алюминия $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа и для меди $E_3 = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.




*а* *б*

Рисунок 3. – Схема напряжения консольной балки и эпюра изгибающих моментов (*а*), поперечное сечение балки (*б*)

Максимальный изгибающий момент возникает в окрестности точки $C$ и равен $M_C = 0{,}15$ кН·м. В этой зоне и будут возникать максимальные нормальные напряжения.

Суммарную жесткость сечения данной консоли определим из выражения

$$(EJ_x)_C = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2} + E_3 J_{x3} = E_1 \frac{bh_1^3}{12} + E_2 \frac{bh_2^3}{12} + E_3 \frac{bh_3^3}{12}.$$

Подставив численные значения, получим

$$(EJ_x)_C = 2 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 20^3}{12} + 0{,}7 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 15^3}{12} + 1{,}2 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 10^3}{12} =$$

$$= 48906{,}25 \cdot 10^5 \, \text{Н} \cdot \text{мм}^2$$

Максимальные нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней будут возникать в наиболее удаленных зонах от нейтральных линий, которые проходят через оси симметрии отдельных частей сечения $x_1$, $x_2$ и $x_3$. В соответствии с формулой (7) определим величины максимальных нормальных напряжений:

$$\sigma_1 = \pm \frac{E_1 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_1}{2} = \pm \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}15 \cdot 10^6}{48906{,}25} \cdot 10 = \pm 61{,}48 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{E_2 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_2}{2} = \pm \frac{0{,}7 \cdot 10^5 \cdot 0{,}15 \cdot 10^6}{48906{,}25} \cdot 7{,}5 = \pm 16{,}1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \pm \frac{E_3 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_3}{2} = \pm \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^6}{48906,25} \cdot 5 = \pm 18,4 \text{ МПа}.$$

Из полученных результатов видно, что нормальные напряжения зависят от жесткости стержня и имеют наибольшие значения в той части сечения, в которой жесткость на изгиб $EJ$ максимальна. В соответствии с приведенной эпюрой изгибающих моментов (см. рисунок 3, *а*) волокна стержней, находящихся выше главных центральных осей $x_1$, $x_2$ и $x_3$, будут подвергаться деформациям растяжения, а нижние – сжатия.

*Литература*

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов /В.И. Федосьев. – М.: Наука, 1972. – 541 с.

2. Сопротивление материалов./ Г.С. Писаренко [и др.] – Киев: Техника, 1967. – 783с.

3. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов./ Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. –462с.

4. Дудяк, А.И. Изгиб составных балок /А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник / БНТУ; редкол.: Ю.В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск: БНТУ, 2022. – Вып. 36. – с. 118–120.

**УДК 539.3**

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Студент гр. 11006121 А. А. Сахарчук, студент гр. 11311122 З. А. Каменев
*Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.*
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии можно решать несколькими способами: методом сил, методом деформаций и энергетическим (принципом наименьшей работы).

*ЗАДАЧА*

В ступенчатом стержне, который одновременно подвергается воздействию сил и нагрева, определить величину зазора $\Delta$, при котором