УДК 537.212

ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

Степанов Дмитрий Александрович*, студент 2-го курса*
кафедры «Электрические станции»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Кленовская И.С., старший преподаватель)

Электростатическое поле можно описать двумя дифференциальными уравнениями:

$$\mathrm{div}E = 4\pi\varrho, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}E = 0. \tag{2}$$

Здесь E – напряженность электростатического поля, ϱ – плотность распределения заряда в нем. Утверждение о том, что E есть градиент некой скалярной функции, являющейся скалярным потенциалом Ф, тождественно последнему уравнению:

$$E = -\mathrm{grad}\Phi. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (3) можно объединить в одно уравнение в частных производных для единственной функции Ф (x):

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\varrho. \tag{4}$$

Это так называемое уравнение Пуассона. Скалярный потенциал соответствует уравнению Лапласа лишь в тех областях пространства, где плотность заряда равна нулю:

$$\nabla^2\Phi = 0. \tag{5}$$

Задание потенциала поверхности, являющейся замкнутой, единственно возможным способом описывает распределение потенциалов, что следует из данных физического опыта. Примером могут являться несколько проводников, на которых поддерживаются разные потенциалы. Это и называется задачей Дирихле или граничными условиями Дирихле. Аналогично можно ожидать, что задание электрического поля (нормальной производной от потенциала) на граничной поверхности также однозначно определяет решение. Подобные граничные условия – это и есть граничные условия Неймана.

Решение уравнений Пуассона или Лапласа в конечном объеме *V*, если на ограничивающей поверхности S заданы граничные условия Дирихле или Неймана, можно получить с помощью теоремы Грина и так называемых функций Грина.

Пусть da – элемент площади, x – некоторая точка векторного поля A, описываемого уравнением $A = \varphi \operatorname{grad} \psi$, где φ и ψ – произвольные скалярные функции. Тогда верно соотношение:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) da. \qquad (6)$$

С помощью теоремы Грина можно представить дифференциальное уравнение Пуассона в виде интегрального уравнения. Для этого рассмотрим какой-либо определенный вид функции Φ, например, положим ее равной $1 / R = 1 / |x - x'|$, где x – точка наблюдения, а x' – переменная интегрирования. Далее функцию φ положим равной скалярному потенциалу Φ. Тогда для точки x, находящейся внутри объема V, верно соотношение:

$$\Phi(x) = \int_V \frac{\varrho(x')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right) da'. \qquad (7)$$

При выводе соотношения (7) мы полагали функцию ψ равной $1 / |x - x'|$, т. е. такой же, как потенциал единичного точечного заряда, соответствующий данному уравнению:

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|x - x'|} \right) = -4\pi \delta(x - x'). \qquad (8)$$

Функция $1 / |x - x'|$ – лишь одна из множества функций, зависящих от x и x' и удовлетворяющих формуле (8). В общем случае верно соотношение:

$$\nabla'^2 G(x, x') = -4\pi \delta(x - x'), \qquad (9)$$

где $G(x, x')$ определяется уравнением:

$$G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x'). \qquad (10)$$

Здесь F удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla'^2 F(x, x') = 0$ внутри объема V.

При отыскании решения уравнения Пуассона, принимающего заданное значение Φ или $\partial \Phi / \partial n$ на границе, мы можем исходить из уравнения (7), которое является интегральным уравнением для Φ.

Если бы вид необходимой функции $G(x, x')$ очень сложно зависел от граничных условий, то этот метод нельзя было бы считать общим. Однако, $G(x, x')$ удовлетворяет довольно простым граничным условиям на S. Исходя из теоремы Грина (6), полагая $\varphi = \Phi$ и $\psi = G(x, x')$ и учитывая соотношение (9) для функции Грина, мы придем к соотношению:

$$\Phi(x) = \int_V \varrho(x') G(x, x') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(G(x, x') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \right) da', \qquad (11)$$

являющемуся обобщением формулы (7). Оставим в поверхностном интеграле только нужные граничные значения, используя свободу в формулировке функции Грина. Так, при задании граничных условий Дирихле будет выполняться условие $G_D(x, x') = 0$ для x' на S. Первый член в поверхностном интеграле в (11) обратится в нуль, и мы получим решение:

$$\Phi(x) = \int_V \varrho(x') G_D(x, x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(x') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da'. \qquad (12)$$

Если заданы граничные условия Неймана, то второй член в поверхностном интеграле в (11) обращается в нуль. Применяя теорему Гаусса к (9), можно убедиться, что верно соотношение:

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi. \qquad (13)$$

Простейшее допустимое граничное условие для G_N имеет вид:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(x, x') = -\frac{4\pi}{S} \text{ для } x' \text{ на } S, \qquad (14)$$

где S – полная площадь граничной поверхности. Тогда решение запишется следующим образом:

$$\Phi(x) = \Phi_{\text{ср}} + \int_V \varrho(x') G_N(x, x') d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N da', \qquad (15)$$

где $\Phi_{\text{ср}}$ – среднее значение потенциала на поверхности S.

В завершение сделаем важное пояснение о физическом значении функции F (x, x'). Эта функция определяет потенциал системы зарядов, находящихся вне объема V, так как является решением уравнения Лапласа в пределах области V. Поскольку потенциал в точке x на поверхности S, создаваемый точечным зарядом, зависит от положения x' этого заряда, потенциал внешнего распределения зарядов F (x, x') также должен зависеть от параметра x'.

Литература:

1. Джексон, Дж. Классическая электродинамика / Дж. Джексон // Издательство "Мир". – Москва, 1965. – С. 26-35.
2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц // Издательство "Физматлит". – Москва, 1960. – т. 3. – С. 174-178.