УДК 514

УРАВНЕНИЕ ЛЕЖАНДРА

***Сулакадзе Дмитрий Владимирович*, *Панков Марк Александрович*,**
студенты 2-го курса кафедры «Автомобильные дороги»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Рыжков С.П., ассистент)

Уравнение Лежандра — это фундаментальное математическое уравнение, которое находит своё применение в самых разнообразных областях науки, от физики до математической аналитики. Оно было введено в научный оборот Адриеном-Мари Лежандром, французским математиком, чьи работы оказали значительное влияние на развитие математического анализа и теории чисел.

Уравнение Лежандра выглядит следующим образом:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

где (y) — функция от переменной (x), а (n) — целое неотрицательное число, которое определяет степень многочлена Лежандра.

Это уравнение является частным случаем более общего класса дифференциальных уравнений, возникающих в задачах, связанных с сферической симметрией, и имеет решения в виде многочленов Лежандра. Эти многочлены обладают уникальными свойствами ортогональности и встречаются в решениях многих физических задач, включая такие, как распределение электростатического поля вокруг сферических тел или описание квантовых состояний частиц в сферических потенциалах.

В данной работе мы рассмотрим историю открытия уравнения Лежандра, его математические свойства, методы решения и применение в различных областях науки. Мы также изучим, как многочлены Лежандра используются для решения конкретных физических и инженерных задач, демонстрируя их важность и универсальность.

Полиномы Лежандра

Многочлен Лежа́ндра — многочлен, который в наименьшей степени отклоняется от нуля в смысле среднего квадратического. Многочлены Лежандра образуют ортогональную систему на отрезке [-1, 1] в пространстве L^2. Они могут быть получены из многочленов $\{1, x, x^2, x^3\}$ ортогонализацией Грама-Шмидта. Названы по имени французского математика Адриен Мари Лежандра.

Рассмотрим основную формулу Лежандра:

$$Pn(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

Рассмотрим ключевые моменты: 1. Pn(x) — многочлен Лежандра степени (n) - Это многочлен, который в наименьшей степени отклоняется от нуля в смысле среднего квадратического.2.(x) — независимая переменная - Это значение, от которого зависит многочлен Лежандра. В уравнении Лежандра, (x) представляет собой переменную, от которой мы ищем решение.3.(n) — целое неотрицательное число - Это степень многочлена Лежандра. Чем больше (n), тем выше степень многочлен

Уравнение Шрёдингера

Для гармонического осциллятора. Рассмотрим квантовый гармонический осциллятор [1,2].

Уравнение Шрёдингера для него имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega^2x^2}{\hbar^2})\psi = 0$$

(ψ) (читается как “пси”) — волновая функция:

(ψ) представляет собой математическое описание состояния квантовой системы.

Она зависит от координаты (x) и времени (t).

Волновая функция содержит информацию о вероятности обнаружения частицы в определенном состоянии.

(m) — масса частицы:

Это масса частицы, движущейся в потенциальном поле.

Масса влияет на динамику системы.

(E) — энергия частицы:

(E) представляет собой полную энергию частицы.

($\hbar$) (читается как “эйч-бар”) — постоянная Планка: связана с квантовой природой микрочастиц и определяет их волновые свойства.

(ω) (читается как “омега”) — частота:

(ω) связана с частотой колебаний системы.

В уравнении Шрёдингера, (ω) определяет потенциальное поле.

(x) — координата:

Это пространственная координата, где происходит движение частицы.

Применим метод Лежандра, представив функцию в виде ряда Лежандра:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

(a_n)— коэффициенты ряда Лежандра:

Это числа, которые определяют вклад каждого многочлена Лежандра в общую волновую функцию.

Каждый (a_n) соответствует определенной степени многочлена Лежандра [3,4].

Уравнение теплопроводности в сферических координатах:

Рассмотрим уравнение теплопроводности в сферических координатах:

$$\frac{du}{dt} = a\nabla^2 u$$

$\frac{du}{dt}$ – материальная производная.

Это производная по времени,которая учитывает движение частицы вместе с потоком. Она описывает изменение свойства (u) во времени.

Применим метод разделения переменных, представив функцию в виде произведения радиальной и угловой частей:

$$u(r, \theta, t) = R(r)Y(\theta)T(t)$$

$u(r, \theta, t)$ — функция:

Это функция, которая зависит от радиальной координаты (r), полярного угла (θ) и времени (t).

Она описывает некоторое физическое свойство в цилиндрической системе координат. $R(r)$— радиальная часть: Это функция, зависящая только от радиальной координаты (r). Она описывает распределение свойства вдоль радиуса цилиндра. $Y(\theta)$— угловая часть: Это функция, зависящая только от полярного угла (θ). Она описывает распределение свойства вокруг оси цилиндра. T(t) — временная часть: Это функция, зависящая только от времени (t). Она описывает изменение свойства во времени[5].

Ортогональные функции:

Ортогональность функций — это понятие из математического анализа, которое описывает свойство функций быть перпендикулярными или независимыми друг от друга. Давайте разберемся, как понять формулу ортогональности функций.

Определение ортогональности функций:

Две функции f(x) и g(x) называются ортогональными на промежутке ([a, b]), если их скалярное произведение равно нулю:

$$\int_{E} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = 0$$

Смысл формулы:

Интеграл от произведения функций f(x) и g(x) на заданном интервале ([a, b]) равен нулю.

Это означает, что функции f(x) и g(x) не коррелируют друг с другом на этом интервале.

$$\int_{E} \varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt = 0$$

Примеры ортогональных функций:

Многочлены Лежандра:

Многочлены Лежандра Pn(x) ортогональны на интервале [-1, 1].

Они используются для разложения функций в ряды и решения дифференциальных уравнений.

В ходе данного реферата мы подробно рассмотрели уравнение Лежандра, его связь с уравнением Шрёдингера и важность ортогональности функций в квантовой механике, а также применение уравнения теплопроводности в сферических координатах. Уравнение Лежандра, будучи одним из ключевых уравнений в математической физике, демонстрирует глубокую связь между различными областями науки и предоставляет мощный инструмент для анализа физических систем.

Мы увидели, что многочлены Лежандра не только решают уравнение Лежандра, но и играют центральную роль в решении уравнения Шрёдингера для сферически симметричных потенциалов, что подчеркивает их значимость в квантовой теории. Ортогональность этих многочленов обеспечивает удобный базис для разложения волновых функций, что является фундаментальным аспектом квантовой механики.

Кроме того, применение уравнения Лежандра в задачах теплопроводности в сферических координатах показывает его универсальность и способность моделировать реальные физические процессы. Это подтверждает, что математические уравнения, такие как уравнение Лежандра, являются неотъемлемой частью нашего понимания природы и технологического прогресса.

В заключение, уравнение Лежандра и его решения продолжают оставаться в центре внимания многих исследований и разработок, открывая новые горизонты в науке и инженерии. Их изучение и понимание несомненно принесут новые открытия и улучшения в различных областях, от фундаментальной физики до прикладных инженерных дисциплин.

Литература:

1. Многочлены Лежандра — Википедия (wikipedia.org)
2. Уравнение Шрёдингера — Википедия (wikipedia.org)
3. Символ Лежандра | Математика | Fandom
4. Vorticity equation - Wikipedia
5. home.cc.umanitoba.ca