УДК 519.2

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О ПОГОНЕ

***Гедо Сергей Анатольевич**, студент 2-го курса*
кафедры «Автомобильные дороги»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Чернявская С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Задача 1

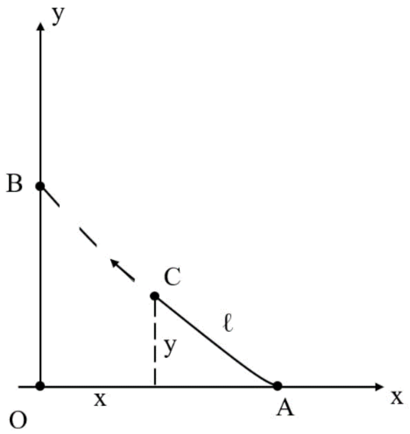

Рисунок 1

Корабль выходит из точки O и с постоянной скоростью плывет по направлению прямой Oy. Одновременно с ним из точки А, расположенной на расстоянии $OA = a$ от судна, выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью в два раза большей скорости корабля. Найти уравнения описанной катером кривой погони и минимальное время, необходимое для достижения корабля.

Решение. Пусть в некоторый момент времени t судно находится в точке В, пройдя путь $OB = Vt$, а катер в этот момент находится в точке $C(x; y)$. Пусть длина дуги AC равна l. (Рис.1)

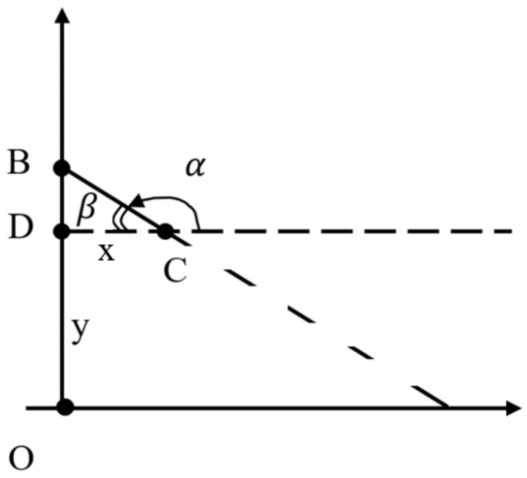

Рисунок 2

Угловой коэффициент касательной в точке C к дуге AC равен $\frac{dy}{dx} = tg\alpha = tg(180^{\circ} - \beta) = -tg\beta = -\frac{BD}{CD} = -\left(\frac{Vt-y}{x}\right) = \frac{y-Vt}{x}$

С другой стороны, $AC = l = 2Vt$, откуда $t = \frac{l}{2V}$

Получим: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-V\frac{l}{2V}}{x}$ или $\frac{xdy}{dx} = y - \frac{l}{2}$ (1)

Продифференцируем уравнение (1) по dx: $\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dl}{dx}$.

Так как $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$, а дифференциал длины дуги $dl = \sqrt{1+(y')^2}dx$, получим дифференциальное уравнение $x\frac{dy'}{dx} = -\frac{1\sqrt{1+(y')^2}}{2}$. Разделив переменные, получим:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \qquad (2)$$

После интегрирования левой и правой частей уравнения:

$$\ln\left|y' + \sqrt{1+(y')^2}\right| = -\frac{1}{2}\ln x + c$$

Вычислим c из начального условия: при $t = 0$, $y' = 0$ и $x = a$.

Получим $c = \ln\sqrt{a}$ и частное решение уравнения будет иметь вид:

$$\ln\left|y' + \sqrt{1+(y')^2}\right| = \ln\sqrt{\frac{a}{x}} \quad \text{или } y' + \sqrt{1+(y')^2} = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Рассмотрев первый случай (со знаком +), приходим к выводу, что решения не существует. Во втором случае, $y' + \sqrt{1+(y')^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}}$, (3)

Здесь можно получить систему уравнений, произведя следующие действия:

$\frac{1}{y'+\sqrt{1+(y')^2}} = -\sqrt{\frac{x}{a}}$; умножив и разделив левую часть последнего уравнения на сопряженное выражение, получим $y' + \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{x}{a}}$ (4).

Таким образом, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' + \sqrt{1+(y')^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}} \\ y' - \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{a}{x}} \end{cases}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим:

$zy' = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$ или $dy = \left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx$

После интегрирования получим общее решение этого дифференциального уравнения: $y = \frac{x\sqrt{x}}{3a} - \sqrt{ax} + c.$

Найдем c из начального условия: при $t = 0, x = a, y = 0.$

Тогда $c = \frac{2a}{3}$ и уравнение искомой кривой имеет вид: $y(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3a} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}$

Катер догонит корабль при $x = 0$, поэтому путь, пройденный кораблем, равен $y = \frac{2a}{3}$, а время, затраченное на погоню, равно $t = \frac{y}{V} = \frac{2a}{3V}$.

Заметим, что в первом случае, проведя аналогичные действия, получим частное решение $y(x) = \sqrt{ax} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - \frac{2a}{3}$ и найдя путь, пройденный кораблем при $x = 0$, получим $y(0) = \frac{-2a}{3}$, что невозможно по смыслу задачи.

Задача 2

Миноносец охотится за подводной лодкой. В некоторый момент лодка всплывает на поверхность воды на расстоянии 3 миль от миноносца. Скорость миноносца в 2 раза больше скорости лодки. Сразу после обнаружения лодка погрузилась в воду и ушла на полной скорости прямым курсом в неизвестном направлении. Определить траекторию (кривую погони), по которой должен следовать миноносец, чтобы он обязательно прошел над подводной лодкой.

Решение.

Введем полярные координаты так, чтобы полюс O находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось r проходила через точку, в которой в момент обнаружения подводной лодки был миноносец. (Рис.3).

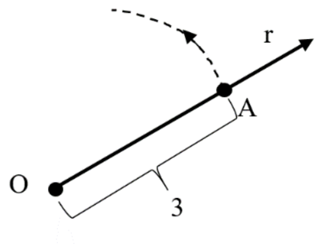

Рисунок 3

Миноносец должен двигаться вокруг полюса O так, чтобы он и подводная лодка все время находились на одном и том же расстоянии от точки O. Сначала миноносец должен идти прямым курсом к точке O до тех пор, пока не окажется на том же расстоянии x от полюса, что и подводная лодка (Рис.4.).

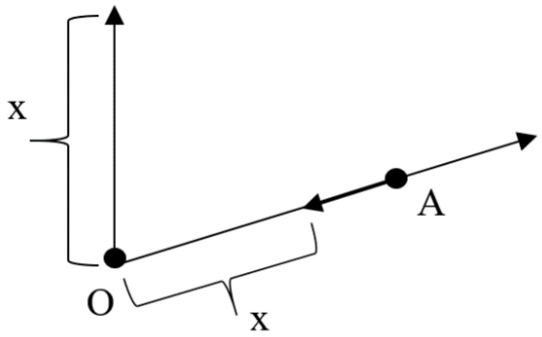

Рисунок 4

Таким образом: $\frac{x}{V} = \frac{3-x}{2V}$, где V – скорость подводной лодки. Из этого уравнения найдем, что $x = 1$ миля. Далее, если подводная лодка не обнаружена, миноносец должен двигаться вокруг полюса O, удаляясь от него со скоростью подводной лодки V. Разложим скорость миноносца на две составляющие: **радиальную,** с которой миноносец удаляется от полюса, и **тангенциальную,** то есть скорость вращения миноносца относительно полюса:$V_r = \frac{dr}{dt}$; $V_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$, где $\frac{d\theta}{dt}$ – угловая скорость (Рис.5).

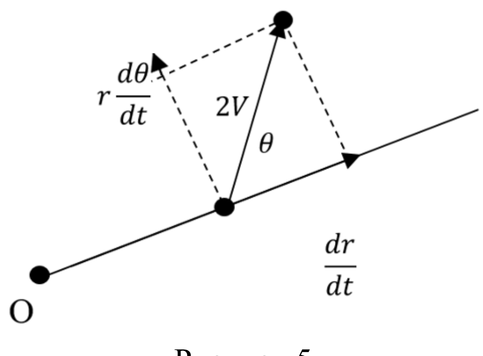

Рисунок 5

Так как $V_r = V$, то $V_\tau = \sqrt{4V^2 - V^2} = V\sqrt{3}$

Окончательно получим: $\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = V \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = V\sqrt{3} \end{cases}$

Откуда, разделив уравнения почленно, получим: $\frac{dr}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}d\theta$.

Тогда $\ln|\mathrm{r}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta + \mathrm{C}$

Найдем c из условия, что движение вокруг полюса O миноносец начинает с полярной оси r на расстоянии x миль от точки O, то есть при $r = 1$ $\theta = 0$. Получим: $\ln|r| = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta + c => C = 0$

Тогда $\ln|r| = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta$ или $r = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\theta}$

Здесь знак $\pm$ означает, что миноносец может двигаться как по часовой стрелке, так и против.

Таким образом, чтобы обнаружить подводную лодку, миноносец должен пройти 2 мили прямым курсом к месту обнаружения подводной лодки, а затем двигаться по одной из спиралей найденного решения.

Литература:

1. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Мн, Вышэйшая школа, 1973, 560с.