УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ НА ОПТИМИЗАЦИЮ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ СЕЧЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

Ковалёнок Константин Леонидович*, студент 1-го курса*
кафедры «Робототехнические системы»
Брейво Александр Иванович*, студент 2-го курса*
кафедры «Автомобильные дороги»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Ковалёнок Н.В., старший преподаватель)

Для разработки и создания разного рода приборов, деталей и конструкций в различных областях производства, в том числе и в строительной сфере, необходимы точные математические расчёты, которые бы гарантировали точность изготовления продукции, позволили бы оптимизировать количество расходных материалов, а в следствии, и затрат на производство продукции. Точность в расчетах поможет снизить потенциальные риски и минимизировать разного рода ошибки.

Для этого иногда бывает достаточно применить знания простейших формул математики, но в более сложных задачах могут применятся методы из различных областей математики и комбинироваться в рамках одной задачи. Так, например, в рассмотренных нами примерах, необходимо построить сечения пространственных тел, так чтобы площадь полученного сечения имела бы наибольшее или наименьшее возможное значение. Для решения данных задач применим векторный метод, а также знания дифференциального исчисления и формул геометрии.

Задача 1

Пусть дана сфера, радиус которой известен. В сферу вписана пирамида, основание которой является прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом 45°, а все боковые ребра равно наклонены к основанию. Какую наибольшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, если это сечение проходит через середину одного из бокового ребра и диагональ основания, не пересекающего данного бокового ребра?

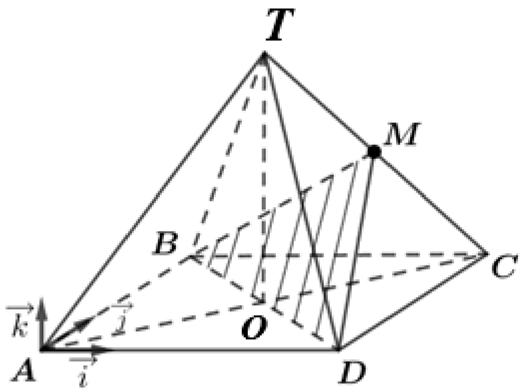

Рисунок 1 – Пирамида

Решение:

Пусть радиус сферы – R.

Очевидно, что высота пирамиды будет лежать на диаметре сферы, а основание высоты проектироваться в точку пересечения диагоналей основания пирамиды.

Если диагональ основания обозначим d, то можно записать зависимость между параметрами R и d: (рис. 1)

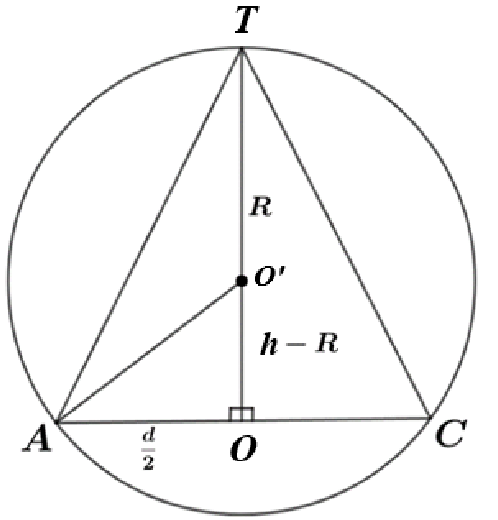

Рисунок 2 – Диагональное сечение пирамиды

$$\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2} = h(2R - h)$$

Преобразовав, получим: $d^2 = 8Rh - 4h^2$

Применив теорему косинусов, выразим стороны прямоугольника:

$a^2 = AB^2 = \frac{d^2}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ b^2 = BC^2 = \frac{d^2}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (рис. 2).

В вершину A поместим правый ортонормированный базис с единичными векторами, ориентированными следующим образом: $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD};\ \vec{j} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB};\ \vec{k} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OT}.$

В этом базисе: $\overrightarrow{AD} = b\vec{i};\ \overrightarrow{AB} = a\vec{j};\ \overrightarrow{OT} = h\vec{k};$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = b\vec{i} - a\vec{j}$

Из треугольника TOC:

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT} = \overrightarrow{OT}$, тогда $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} - \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{b}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j} +$
$+ h\vec{k}$.

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CT} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j} + h\vec{k}\right)$,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = (b; 0; 0) + \frac{1}{4}(-b; -a; 2h) = \frac{3}{4}b\vec{i} - \frac{a}{4}\vec{j} + \frac{h}{2}\vec{k}$

Применим векторное произведение векторов: $S_{BMD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BM}\right|$,

где $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & -a & 0 \\ \frac{3}{4}b & -\frac{a}{2} & \frac{h}{2} \end{vmatrix} = -\frac{ah}{2}\vec{i} - \frac{bh}{2}\vec{j} + \left(-\frac{ab}{4} + \frac{3}{4}ab\right)\vec{k}$.

Тогда площадь треугольника BMD: $S_{BMD} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2h^2 + b^2h^2 + a^2b^2}$, подставив зависимости сторон от диагоналей и выражения связующие h, d и R, получим: $S_{BMD}(h) = \frac{1}{4}\sqrt{8h^2 \cdot R^2 - 2h^4}$, где $h \in (0; 2R)$.

Найдем производную функции:

$F(h) = 8h^2R^2 - 2h^4$ по переменной h.

$F'(h) = 16hR^2 - 8h^3$ и решим уравнения

$F'(h) = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = \sqrt{2}R$, $h_3 = -\sqrt{2}R$.

По смыслу задачи подходит $h_2 = \sqrt{2}R$.

Подставим результат в функцию $F(h)$ и найдем искомое значение, при котором площадь будет наибольшей:

$S_{BMD}(\sqrt{2}R) = \frac{1}{4}\sqrt{8\left(\sqrt{2}R\right)^2 \cdot R^2 - 2\left(\sqrt{2}R\right)^4} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: наибольшая площадь данного сечения $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2

Дана пирамида SABC, у которой основание треугольник с углом A, равным 60°, а боковое ребро SA является высотой, величина которого известна, ребро SC перпендикулярно стороне основания BC, а угол между ребром BC и биссектрисой основания AD равен 60°.

Найти наименьшую площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро SB.

Решение:

Так как высота пирамиды известна – обозначим её h.

В точке А построим правый ортонормированный базис (рис.3)

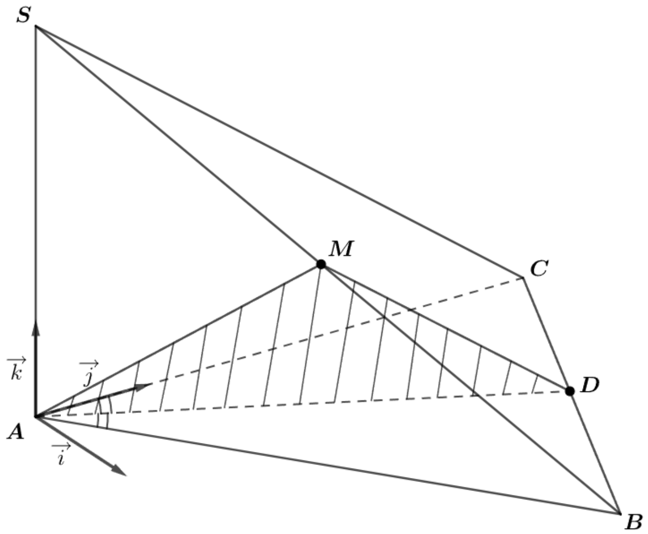

Рисунок 3 – Сечение пирамиды

Пусть длина сторон: АС = a; АВ $= b$; CВ = с.

Тогда $\overrightarrow{AC} = a\vec{j}$; $\overrightarrow{AS} = h\vec{k}$ и $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = a\vec{j} - h\vec{k}$.

Так как угол между $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{SC}$ равен 90°, то:

$$\cos(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{SC}) = \frac{|\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{x \cdot 0 + y \cdot a + 0 \cdot h}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}} = 0$$

$=> ay = 0 <=> y = 0$

Из соотношения $c^2 = x^2 + y^2$, получим, что $x = c$, и тогда $\overrightarrow{CB} = c\vec{i}$. Этот факт означает, что основание прямоугольной треугольник с прямым углом при вершине С.

Далее, $b = \sqrt{a^2 + c^2}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = c\vec{i} + a\vec{j}$.

Так как угол между $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ равен 60° и $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} =$

$= \frac{0 \cdot c + a \cdot 0 + 0 \cdot 0}{a \cdot b} = \frac{1}{2}$

То есть $\frac{a^2}{a \cdot b} = \frac{1}{2}$ $=>$ $b = 2a$.

Тогда $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Значит $\overrightarrow{AC} = a\vec{j}$; $\overrightarrow{AB} = a\sqrt{3}\vec{i}$; $\overrightarrow{CB} = a\sqrt{3}\vec{i}$.

Находим координаты вектора биссектрисы $\overrightarrow{AD}$ (вектор биссектрисы выражается через прилежащие векторы сторон треугольника)

$\overrightarrow{AD} = \frac{AB}{AC+AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{AC}{AC+AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, где AC и AB – длины сторон.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2a}{2a+a} \cdot (a\vec{j}) + \frac{a}{2a+a} \cdot \left(a\sqrt{3}\vec{i} + a\vec{i}\right) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + a\vec{j}.$$

Из треугольника ASB следует, что $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB}$, значит

$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = \left(a\sqrt{3}\vec{i} + a\vec{j}\right) - \left(h\vec{k}\right) = a\sqrt{3}\vec{i} + a\vec{j} - h\vec{k}.$$

И так как угол между $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен 60°, то

$$\cos\left(\overrightarrow{SB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{a^2 \cdot \frac{3}{3} + a^2 + h \cdot 0}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} \cdot \sqrt{3a^2 + a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4a^2 + h^2}} = \frac{1}{2}$$

$=> \ \sqrt{4a^2 + h^2} = 2\sqrt{3}a \ => \ h = 2\sqrt{2}a.$

Используя векторное произведение векторов, найдем выражение для площади сечения: $S_{MAD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AM}\right|$,

где $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{AS} + m\overrightarrow{SB} = n\vec{k} + m\left(a\sqrt{3}\vec{i} + a\vec{j} - h\vec{k}\right) = m \cdot a\sqrt{3}\vec{i} +$
$+ m \cdot a\vec{j} + h(1-m)\vec{k}$, где $m \in [0; 1]$.

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a\sqrt{3}}{3} & a & 0 \\ m \cdot a\sqrt{3} & m \cdot a & h(1-m) \end{vmatrix}$$

С учётом, что $h = 2\sqrt{2}a$ получим:

$$\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AM} = \frac{h^2}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 \\ \frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{m}{2\sqrt{2}} & (1-m) \end{vmatrix} =$$

$= \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\left((1-m)\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}(1-m)\vec{j} + \left(\frac{m\sqrt{3}}{3 \cdot 2\sqrt{2}} - \frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\vec{k}\right)$ и значит $\left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AM}\right| =$
$= \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\sqrt{(1-m)^2 + \frac{1}{3}(1-m)^2 + \frac{1}{6}m^2}.$

А площадь искомого треугольника ADM:

$S(m) = \frac{h^2}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}(1-m)^2 + \frac{1}{6}m^2}$, где $m \in [0; 1]$.

Продифференцировав по переменной m:

$$S'(m) = \frac{h^2}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{4}{3}(1-m)^2 + \frac{1}{6}m^2}} \cdot \left(-\frac{8}{3}(1-m) + \frac{1}{3}m\right).$$

Для нахождения нулей производной решим уравнение:

$$-\frac{8}{3}(1-m) + \frac{1}{3}m = 0 \quad => \quad m = \frac{8}{9}.$$

Убеждаемся, что найденный экстремум является локальным минимумом. Значит, искомое наименьшее значение площади сечения:

$$S_{ADM} = S\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{h^2}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}\left(1-\frac{8}{9}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \frac{h^2}{6\sqrt{6}}$$

Ответ: Наименьшая площадь данного сечения $\frac{h^2}{6\sqrt{6}}$.

Рассмотренные задачи могут быть полезными в практических целях, где необходимо провести расчет с целью экономии материала или установить наибольшие возможные значения размеров детали, например, для ее устойчивости или других целей.

Литература.

1. А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. Аналитическая геометрия. Из серии «Математика в техническом университете», выпуск 3. Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. Москва 1998.
2. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Основы математического анализа (часть первая). Издание пятое. Из серии «Курс высшей математики и математической физики», выпуск 1. Издательство Наука. Физматлит. Москва 1998.