

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурунжиев Р.И. Автоматизированное проектирование колебательных систем. — Минск, 1977. — 452 с. Е го же . Проектирование оптимальных виброзащитных систем. — Минск, 1971. — 387 с. 3. Фурунжиев Р.И., Напрасников В.В., Антипенко И.А. О построении матрицы масс для некоторого класса стержневых элементов. — Рук. деп. в БелНИИНТИ 02.11.79, № 96 Деп. — 7 с. 4. С и н и ц ы н А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений. — М., 1978. — 231 с. 5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. — М., 1979. — 320 с. 6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975. — 541 с.

УДК 624.042.8

Р.И.Фурунжиев, В.В.Напрасников

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Известно, что методы, используемые в настоящее время для расчета некоторых элементов конструкций автомобилей и тракторов (кузовов, рам), не отражают современных требований экономии металла. Это происходит вследствие недостаточно точного характера предположений, положенных в основу расчета. Зачастую расчеты ведутся в рамках теории сопротивления материалов. Назрела необходимость использовать методы теории упругости, которые учитывают распределенный характер параметров моделей, описывающих поведение реальных объектов.

Задача становится особенно сложной при рассмотрении динамики мобильных объектов, подверженных возмущениям случайного характера [1]. Существует целый ряд методов (метод R-функций, конечно-разностные методы и т.д.), позволяющих решать описанные задачи, но математический аппарат этих методов непривычен инженеру и плохо поддается машинной реализации (для реальных объектов). Зачастую используются и дополнительные предположения, сводящие к минимуму достоинства этих методов.

Настоящая статья посвящена одному из аспектов метода конечных элементов, который, по нашему мнению, является одним из наиболее доступных по простоте математического аппарата для инженера, хорошо описывая в то же время свойства реальных конструкций автомобилей и тракторов.

Реальные объекты, встречающиеся в задачах проектирования колебательных систем, имеют сложную геометрию [1]. Один из методов, позволяющих с достаточной степенью точности учитывать конфигурацию объекта, — это метод конечных элементов. Однако точность, получаемая при решении динами-

ческих задач, тесно связана с количеством введенных степеней свободы, которое ограничено размерами памяти ЦВМ.

В отдельных случаях удается введением регулярной сетки [2] добиться более компактного хранения информации, однако в сложных пространственных задачах регуляризация сетки не всегда возможна.

С другой стороны, быстрый прогресс в области развития вычислительной техники позволяет не рассматривать время решения задачи как главный критерий эффективности алгоритма. На первый план выдвигается вопрос точности [1], т.е. наилучшего использования объема оперативной памяти ЦВМ. Он приобретает еще больший вес в физически нелинейных и динамических задачах теории упругости, в которых [3] даже однократное обращение матрицы вызывает определенные трудности, связанные с большими затратами машинного времени и необходимостью размещения обратной матрицы в памяти машины.

Из сказанного следует, что для решения систем линейных уравнений, возникающих на каждом шаге по времени, рационально пользоваться итеративными методами, не меняющими матрицу.

Как указывают авторы [4], матричные дифференциальные уравнения, описывающие поведение упругой конструкции, могут быть решены с помощью подходящих рекуррентных соотношений. Рекуррентное соотношение, позволяющее находить значения смещений и скоростей на каждом шаге по времени по их значениям в конце предыдущего шага, можно получить, например, применяя метод Галеркина для минимизации невязки в пределах каждого шага:

$$\Delta t \begin{Bmatrix} H_{01} \\ H_{11} \end{Bmatrix} \left[([K] + [C] \frac{d}{dt} + [M] \frac{d^2}{dt^2}) [H_{00}, H_{10}, H_{01}, H_{11}] \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d/dt \{ \delta_0 \} \\ d/dt \{ \delta_1 \} \end{Bmatrix} \right] + \{ \bar{F} \} dt = 0. \quad (1)$$

Обозначения в выражении (1) полностью соответствуют [4]. Ниже для краткости будем обозначать

$$\{ \delta_0 \} = U_0; \quad d/dt \{ \delta_0 \} = V_0; \quad \{ \delta_1 \} = U_1; \quad d/dt \{ \delta_1 \} = V_1;$$

U_k - k-я компонента вектора смещений U ; V_k - k-я компонента вектора скоростей V .

Производя интегрирование в уравнении (1) и разрешая его относительно U_1 и V_1 , получим систему линейных алгебраических уравнений специального вида

$$\begin{pmatrix} a_1 [K] + a_2 [M] & a_3 [K] + a_4 [M] \\ a_5 [K] + a_6 [M] & a_7 [K] + a_8 [M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_9 [K] + a_{10} [M] & a_{11} [K] + a_{12} [M] \\ a_{13} [K] + a_{14} [M] & a_{15} [K] + a_{16} [M] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В соотношении (2) a_1, a_2, \dots, a_{16} — постоянные величины на данном шаге времени; f_1, f_2 — векторы, полученные по формулам

$$f_1 = 3\Delta t^{-2} \int_0^{\Delta t} t^2 \{ \vec{F} \} dt - 2\Delta t^{-3} \int_0^{\Delta t} t^3 \{ \vec{F} \} dt;$$

$$f_2 = -\Delta t^{-2} \int_0^{\Delta t} t^2 \{ \vec{F} \} dt + \Delta t^{-3} \int_0^{\Delta t} t^3 \{ \vec{F} \} dt.$$

Матрицы жесткости [K] и масс [M] имеют ленточную [4, 5] структуру и симметричны, что позволяет хранить в памяти ЦВМ лишь верхнюю часть ленты этих матриц.

Будем минимизировать сумму квадратов невязок по строкам системы (2) на R-м шаге. Минимум в точке U^*, V^* является решением системы (2), причем природа задачи гарантирует единственность решения.

Приравнявая нулю частные производные от суммы квадратов невязок по координатам V_R^k и U_R^k и разрешая полученные уравнения относительно U_R^k и V_R^k , получим соответственно

$$U_R^k = - \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_1 k_{ij} + a_2 m_{ij}) U_j + \sum_{j=1}^n (a_3 k_{ij} + a_4 m_{ij}) V_j - g_{i1} \right] \times \right.$$

$$\times (a_1 k_{ik} + a_2 m_{ik}) + \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_5 k_{ij} + a_6 m_{ij}) U_j + \sum_{j=1}^n (a_7 k_{ij} + a_8 m_{ij}) V_j - g_{i2} \right] \times$$

$$\left. \times (a_5 k_{ik} + a_6 m_{ik}) \right\} / \sum_{i=1}^n [(a_1 k_{ij} + a_2 m_{ij})^2 + (a_5 k_{ij} + a_6 m_{ij})^2];$$

$$V_R^k = - \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_1 k_{ij} + a_2 m_{ij}) U_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (a_3 k_{ij} + a_4 m_{ij}) V_j - g_{i1} \right] \times \right.$$

$$\times (a_3 k_{ik} + a_4 m_{ik}) + \left[\sum_{j=1}^n (a_5 k_{ij} + a_6 m_{ij}) U_j + \sum_{j=1}^n (a_7 k_{ij} + a_8 m_{ij}) V_j - g_{i2} \right] \times$$

$$\left. \times (a_7 k_{ik} + a_8 m_{ik}) \right\} / \sum_{i=1}^n [(a_3 k_{ik} + a_4 m_{ik})^2 + (a_7 k_{ik} + a_8 m_{ik})^2],$$

Таблица 1

Параметры	N ^o						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
U ₀	3	0	0	3	-1	1	2
V ₀	3	0	1	1	2	1	1
t ₀	0	0	0	0	0	0	0
t _K	3	3	1	1	1	1	1
h	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
ε	0,01	0,01	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Примечания. N^o – номер варианта; U₀V₀ – начальное значение первой и второй группы координат соответственно; t₀, t_K – начальный и конечный момент времени соответственно; h – шаг по времени; ε – точность (критерий останковки) на каждом шаге по времени по норме вектора невязки.

$$\text{где } g_{i1} = \sum_{j=1}^n (a_{9k_{ij}+a_{10m_{ij}}) U_{0j} + \sum_{j=1}^n (a_{11k_{ij}+a_{12m_{ij}}) V_{0j} - f_{1i};$$

$$g_{i2} = \sum_{j=1}^n (a_{13k_{ij}+a_{14m_{ij}}) U_{0j} + \sum_{j=1}^n (a_{15k_{ij}+a_{16m_{ij}}) V_{0j} - f_{2i};$$

$g_{i1}g_{i2}$ – не меняются на данном шаге по времени.

В состав программы, реализующей описанный алгоритм, входит девять подпрограмм. Подпрограмма AIAI позволяет производить перемножение симметричных ленточных матриц, хранящихся в компактной форме.

Результаты работы программы для матрицы жесткости [K], где

$$k_{ii} = 8, \quad i = 1, 2, \dots, 10;$$

$$k_{ii+1} = 4, \quad i = 1, 2, \dots, 9;$$

$$k_{ii+2} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

и матрицы масс $[M]$, где

$$m_{ii} = 4, \quad i = 1, 2, \dots, 10;$$

$$m_{ii+1} = 2, \quad i = 1, 2, \dots, 9;$$

$$m_{ii+2} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

приведены в табл. 1.

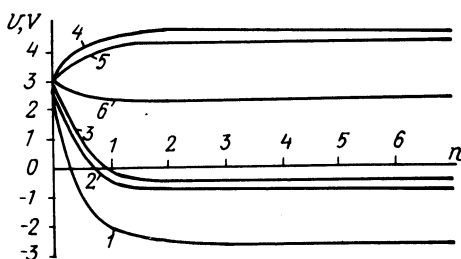


Рис. 1. Изменение компонент векторов: 1, 2, 3 — соответственно первой, третьей и десятой компонент вектора U ; 4, 5, 6 — соответственно первой, третьей и десятой компонент вектора V ; n — количество циклов итераций.

На рис. 1 приведен характер изменения первой, третьей и десятой компонент векторов U и V .

Как видно, решение практически устанавливается уже после трех циклов итераций. Та же ситуация наблюдается для всех компонент U и V во всех семи вариантах.

Таким образом, описанный алгоритм позволяет решать системы линейных алгебраических уравнений специального вида, возникающие в задачах динамики упругих конструкций, без копирования обратной матрицы системы. Это дает возможность повысить точность решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф у р у н ж и е в Р.И. Автоматизированное проектирование колебательных систем. — Минск, 1977. — 452 с.
2. С о м е н о в В.В. Реализация расчетов методом конечных элементов на ЭЦВМ. — В сб.: Опыт оценки устойчивости склонов сложного геологического строения методом конечных элементов и экспериментами на моделях. М., 1973, с. 71–79.
3. Ф у р у н ж и е в Р.И., Н а п р а с н и к о в В.В. Оптимизация шага в комбинированном алгоритме решения задачи о колебаниях конструкций мобильных машин. — В данном сборнике.
4. З е н к е в и ч О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975. — 541 с.
5. Б е л л м а н Р. Введение в теорию матриц. — М., 1976. — 371 с.