УДК 681.2

МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ВРЕМЕННЫХ СПЕКТРОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ В ДИСКРЕТНОМ БАЗИСЕ ФУРЬЕ

Пономарева О.В.
Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова
Ижевск, Российская Федерация

Рассмотрим вопросы измерения временных спектров детерминированных дискретных сигналов на конечных интервалах.

Введем в теорию дискретных измерений спектров детерминированных сигналов на конечных интервалах в дискретном базисе Фурье еще одну форму преобразования Фурье – **дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ).**

Пусть задана некоторая последовательности $S(k),\ k=\overline{-\infty,+\infty}$, ДЧПФ которой определим следующим образом:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(k)\cdot\exp(+j2\pi\cdot k\cdot t)\,; \qquad (1)$$
$$-\infty\le t\le+\infty\,.$$

Соотношением (1) определяется непрерывный временной спектр, соответствующий дискретной последовательности $S(k),\ k=\overline{-\infty,+\infty}$. Несложно видеть, что дискретный измерительный сигнал, заданный на конечном интервале $x(n),\ n=\overline{0,N-1}$, равен значениям непрерывного временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности $S_N(k),\ k=\overline{0,N-1}$ в точках $n=\overline{0,N-1}$:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_N(k)\cdot\exp(+j2\pi\cdot k\cdot t)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}S_N(k)\cdot\exp(+j2\pi\cdot k\cdot t)\,,0\le t\le 1\,. \qquad (2)$$

Таким образом, исходный дискретный измерительный сигнал $x(n),\ n=\overline{0,N-1}$, являясь, одним из возможных временных спектров дискретного измерительного сигнала $x(n)$, не отвечает на вопрос, каковы значения временного спектра, определяемого ДЧПФ последовательности $x(n),\ n=\overline{0,N-1}$, между точками $n=\overline{0,N-1}$ во временной области, порождая тем самым эффект названный автором **«эффектом частокола во временной области».**

При дискретных измерениях временных спектров детерминированных сигналов на конечных интервалах для определения значений временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности $S_N(k),\ k=\overline{0,N-1}$ в промежутках между значениями $x(n),\ n=\overline{0,N-1}$ применяется искусственное увеличение интервала определения $S_N(k),\ k=\overline{0,N-1}$ за счет добавления нулевых отсчетов в частотной области [1 – 3]. Назовем данную операцию операцией дополнения нулями в частотной области (ОДНЧ).

ОДНЧ позволяет уменьшить влияние эффекта частокола во временной области на результаты дискретных измерений временных спектров. ОДНЧ позволяет за счет уменьшения шага дискретизации во времени измерять временные спектры, задаваемые ДЧПФ. Однако, ОДНЧ имеет следующие существенные недостатки, которые проявляются при реализации ОДНЧ процессорными измерительными средствами (ПрИС):

- необходимость существенного расширения оперативной памяти ПрИС для хранения нулевых значений спектра;
- проведение непроизводительных вычислений ПрИС с нулевыми значениями спектра;
- фиксированность шага дискретизации по времени при измерении временного спектра.

Рассмотрим изменение базиса обратного ДПФ (ОДПФ) в результате применения операции дополнения нулями в частотной области.

ОДПФ в матричной форме задается следующим выражением:

$$X_N=F_N^{*}S_N\,, \qquad (3)$$

где * – знак комплексного сопряжения, $X_N=\left[x(0),x(1),.....,x(N-1)\right]^T$ - представление дискретного сигнала $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$, в виде вектора N - мерного линейного пространства;
T - знак транспонирования;
$S_N=\left[s(0),s(1),...,s(N-1)\right]^T$ - вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ, задаваемой матрицей:

$$F_N^{*}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . & . & (N-1) \end{array}\ \ n \\ \begin{array}{c} 0\\ 1\\ .\\ .\\ (N-1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & . & . & 1\\ 1 & W_N^{-1} & . & . & W_N^{-(N-1)}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ 1 & W_N^{-(N-1)} & . & . & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{array}\right] \\ k & \end{array}$$

Пусть спектр действительного измерительного сигнала *x(n)*, $n=\overline{0,N-1}$, $S_{N\cdot r}$ содержит $N(r-1)/r$ нулей:

$$S_{N\cdot r}=[s(0),...,s(N/2-1),\underbrace{0,...,0}_{N(r-1)},s(N/2),...,s(N-1)]^T$$

Выполнение согласно (2.29) измерительного преобразования ОДПФ спектра $S_{N\cdot r}$ приводит к усечению «средних» столбцов матрицы $F^*_{N\cdot r}$ и превращению ее из квадратной матрицы в прямоугольную матрицу $H^*_{Nr\times N}$.

Обозначим множество номеров строк матрицы $H^*_{Nr\times N}$ через $B: B=\{0,1,2,...,(Nr-1)\}$. Применим к множеству B отношение сравнимости по модулю r. В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, оно разбивает множество A на r классов вычетов по модулю r:

$B_0=\{0,r,...,r(N-1)\}$,

…………………

$B_{r-1}=\{r-1,r+(r-1),...,r(N-1)+(r-1)\}$

$$B_i\neq\varnothing;\quad B_i\bigcap_{i\neq j}B_j=\varnothing;\qquad \bigcup_{i=0}^{r-1}B_i=B.$$

Используя полученное разбиение и умножая предварительно вторую половину спектра S_N действительного измерительного сигнала $x(n)$, где $S_N=[s(0),...,s(N/2-1),s(N/2),...,s(N-1)]^T$ на поворачивающий множитель C:

$$c_i=C=W_N^{-N\cdot(r-1)\cdot\xi};\ \text{для}\ \forall\ i\in\overline{0,N-1}$$

представим матрицу $H^*_{Nr\times N}$ в виде r квадратных матриц $F^*_{N,\xi}$, размерность каждой из которых N, номера строк являются классами вычетов по модулю r, а элементы соответствующих строк равны элементам матрицы $H^*_{Nr\times N}$:

$$F^*_{N,\xi}=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0 & 1 & . & N/2-1 & .. & N-1 & k\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\1\\.\\.\\N-1\\n\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & W_N^{-\xi} & . & W_N^{-\xi(N/2-1)} & .. & W_N^{-\xi(N-1)}\\ 1 & W_N^{-(1+\xi)} & . & W_N^{-(1+\xi)(N/2-1)} & .. & W_N^{-(1+\xi)(N-1)}\\ . & . & . & . & .. & .\\ . & . & . & . & .. & .\\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi)} & . & W_N^{-(N-1+\xi)(N/2-1)} & .. & W_N^{-(N-1+\xi)(N-1)}\end{bmatrix}\end{array}$$

где $\xi=0,\ 1/r,\ ...,(r-1)/r$; $k,n=\overline{0,(N-1)}$.

Дискретные функции (строки матрицы $F^*_{N,\xi}$) вида:

$$def_{pM}(k,n,\xi)=W_N^{-k(n+\xi)}=\exp\left[+j\frac{2\pi}{N}k(n+\xi)\right],$$

$$k,n=\overline{0,(N-1)},\ 0\le\xi<0,$$

назовем модифицированными параметрическими дискретными экспоненциальными функциями (МДЭФ-П).

Рассмотрим основные свойства МДЭФ-П.

1. МДЭФ-П как и ДЭФ-П не являются функциями двух равноправных переменных k и n. Следовательно, матрица МДЭФ-П $F^*_{N,\xi}$ ассиметрична;

2. МДЭФ-П являются периодическими по переменной n и параметрически периодическими по переменной k с периодом N:

$$def_{pM}(k,(n\pm pN),\xi)=def_{pM}(k,n,\xi),$$
$$def_{pM}((k\pm pN),n,\xi)=def_{pM}(k,n,\xi)W_N^{\pm\xi\cdot N\cdot p};$$

3. система МДЭФ-П не мультипликативна по переменной n и мультипликативна по переменной k;

4. среднее значение МДЭФ-П по переменной n равно нулю при $k\neq0$;

5. $$\sum_{n=0}^{N-1}def_{pM}(k,n,\xi)=\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\xi\ k\right)\frac{1-\exp(-j2\pi\ k)}{1-\exp(-j\frac{2\pi}{N}k)},$$

а по переменной k не равно нулю;

6. система МДЭФ-П ортогональна по обеим переменным;

7. система МДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе МДЭФ-П назовем ***модифицированным параметрическим дискретным преобразованием Фурье (МДПФ-П)***, которое позволяет эффективно измерять временные спектры детерминированных сигналов на конечных интервалах.

1. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С.7–11.
2. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С.2–6.
3. Пономарева О.В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 2. – С.2–5.