УДК 681.2

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ В ДИСКРЕТНОМ БАЗИСЕ ФУРЬЕ

Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарева Н.В.
Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова
Ижевск, Российская Федерация

Дискретный базис Фурье (базис дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ)), благодаря ряду преимуществ перед другими базисами, занимает важное место в косвенных измерениях спектров сигналов и корреляционных функций на конечных интервалах. Широкое применение дискретного преобразования Фурье в анализе стационарных процессов и систем главным образом основано на фундаментальном свойстве, отмеченном Н. Винером – свойстве инвариантности экспоненциального базиса к циклическому сдвигу. Кроме того, благодаря свойству мультипликативности базисной системы ДЭФ (по обеим переменным) возможно построение, так называемых, быстрых преобразований - быстрых преобразований Фурье (БПФ). Отметим, что БПФ это не новая форма преобразования Фурье, а название целого ряда алгоритмов эффективного вычисления ДПФ.

Разложение сигнала по системе ДЭФ носит название дискретного преобразования Фурье (дискретного преобразования Фурье), которое при дискретных косвенных измерениях является измерительным преобразованием [1,2,3]. Пара преобразований дискретного преобразования Фурье задается в обычной форме следующими соотношениями:

прямое ДПФ: $$S_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ W_N^{kn};$$

обратное ДПФ: $$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k)\ W_N^{-kn};$$

где $W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$, $k = \overline{0,(N-1)}$.

Теория дискретных измерений частотных спектров сигналов на конечных интервалах базируется на трех основных и взаимосвязанных положениях [3]:

1. определение сигнала на конечном множестве N точек;
2. определение сдвига сигнала как некоторой перестановки его отсчетов;
3. определение системы дискретных базисных функций.

В рамках ДПФ определены все вышеперечисленные положения теории дискретных измерений спектров:

- сигнал $x(n)$ задается на конечном интервале $\overline{0, N-1}$;
- сдвиг сигнала $x(n)$ определяется как циклическая перестановка его отсчетов внутри интервала;
- в качестве базисной системы определена система дискретных экспоненциальных функций $def_p(k,n) = \exp(-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n)$; $k,n = \overline{0, N-1}$.

С точки зрения практического применения аппарата ДПФ отметим следующий важный момент. Несмотря на то, что ДПФ последовательности $X(n), n = \overline{0, N-1}$ в принципе может рассматриваться как некоторое приближение к преобразованию Фурье от функции, порождающей последовательность $X(n)$, однако, и это следует подчеркнуть, свойства ДПФ являются точными и не являются приближенными, основанными на свойствах преобразования Фурье непрерывных сигналов.

В случае использования ДПФ дискретного измерительного сигнала $x(n)$ различают временную область – область дискретной переменной n и частотную область $S_N(k)$ – область переменной k, а в случае непрерывного преобразования Фурье (НПФ) непрерывного измерительного сигнала $x(t)$ также различают временную область – область непрерывной переменной t и частотную область $S(f)$ – область переменной f.

В теории ЦОС доказаны следующие положения [1,2,4]:

• определение (дискретной или непрерывной) функции на конечном интервале (операция взвешивания) в одной из областей, приводит к свертке (фильтрации) в другой области с функцией вида $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$;

• выполнение операции дискретизация функции в одной области приводит к операции периодизации (периодического продолжения) в другой;

• операции дискретизации и взвешивания являются линейными и коммутативными операциями.

Из того, что дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) некоторой последовательности $y(n)$, $n=\overline{-\infty,+\infty}$ задает ее непрерывный спектр и ДВПФ определяется как z-преобразование последовательности $y(n)$, $n=\overline{-\infty,+\infty}$ на единичной окружности:

$$S_y(f)=S_y(z)\Big|_{z=\exp(-j2\pi f)}=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\cdot\exp(-j2\pi\cdot f\cdot n)\,, \qquad -\infty\le f\le\infty\,,$$

а также с учетом указанных выше положений, следует вывод о том, что коэффициенты ДПФ $S_N(k)$ последовательности $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$ равны значениям ДВПФ взвешенной последовательности $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$ (взвешенное ДВПФ) в точках $\frac{2\pi}{N}k$, $k=\overline{0,N-1}$ на единичной окружности:

$$S(f)=S(z)\Big|_{z=\exp(-j2\pi f)}=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot\exp(-j2\pi\cdot f\cdot n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cdot\exp(-j2\pi\cdot f\cdot n);\ 0\le f\le 1\,. \quad (2.7)$$

Таким образом, ДПФ, являясь косвенным измерительным преобразованием, позволяет измерять в дискретном множестве точек $\frac{2\pi}{N}k$, $k=\overline{0,N-1}$ непрерывный спектр, задаваемый взвешенным ДВПФ.

При практическом применении ДПФ возникает ряд проблем, появление которых связано с проявлением специфических эффектов, сопровождающих его использование [3].

Отметим три из них.

1. ДПФ не дает ответа на вопрос: каковы значения спектра, определяемого ДВПФ последовательности $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$, между точками $\frac{2\pi}{N}k$, $k=\overline{0,N-1}$ на единичной окружности порождая тем самым известный в ЦОС «эффект частокола».

2. Применению ДПФ сопутствует также «эффект размывания спектральных составляющих», «leakage») (часто называемый «эффектом утечки»). Проявление данного эффекта связано с тем, что при выполнении спектрального анализа исследуемой функции мы измеряем циклическую свертку спектра исследуемой функции с функцией вида $\frac{\sin(N\cdot x/2)}{N\sin(x/2)}$, которая не локализована, а размыта по частоте (отсюда и название эффекта).

3. При применении ДПФ возникает также «эффект паразитной амплитудной модуляции спектра» (называемый в иностранной литературе также «гребешковым эффектом»). Проявление данного эффекта связано с тем, что, так как частотные характеристики фильтров, соответствующих коэффициентам ДПФ (бинам ДПФ) имеют вид $\frac{\sin(N\cdot x/2)}{N\sin(x/2)}$, то это приводит к флуктуации общего амплитудного спектра при N - точечном ДПФ (флуктуации достигают 4 дБ).

При дискретных измерениях спектров детерминированных сигналов на конечных интервалах для определения значений ДВПФ последовательности $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$ между значениями отсчетов ДПФ применяется искусственное увеличение интервала определения $x(n)$, $n=\overline{0,N-1}$ за счет добавления нулевых отсчетов во временной области [1]. Данную операцию назовем операцией дополнения нулями во временной области. (ОДНВ).

ОДНВ позволяет уменьшить влияние эффектов паразитной амплитудной модуляции спектра и частокола на результаты дискретных измерений спектров. Отметим, что ОДНВ не улучшает разрешающую способность ДПФ по частоте, как часто утверждается в работах по ЦОС [2]. ОДНВ позволяет за счет уменьшения шага дискретизации по частоте измерять частотные спектры между отсчетами ДПФ, а также улучшать условия выявления и измерения частот скрытых периодичностей [4]. Отметим следующие существенные недостатки ОДНВ, проявляющиеся при ее реализации процессорными измерительными средствами (ПрИС):

- необходимость существенного расширения оперативной памяти ПрИС для хранения нулевых значений сигнала;
- проведение непроизводительных вычислений ПрИС с нулевыми значениями сигнала;
- фиксированность шага дискретизации по частоте при измерении спектра.

1. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ.-М.: ООО «Бином-Пресс», 2007.-656 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б.Теория и применение цифровой обработки сигналов. Пер. с англ.-М.: «Мир», 1978.-834 с.
3. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов.-2010.-№ 2.- С.7-11.
4. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Цифровой периодограманализ и проблемы его практического применения // Вестник Ижевского Государственного Технического Университета. 2013. - №2.(58). - С. 130-133.