ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Е.Е. Кулеш

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***И.П. Мартынов***

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Пусть $f(t)$ – оператор дифференцирования по [illegible]. Зададим оператор [illegible] следующим образом:

$$B = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \ldots + p_{n-2} D^2 + p_{n-1} D + c,$$

где $c = c(x,t)$, а коэффициенты [illegible] заданы формулами

$$p_m = C_n^m D^m \left(\frac{e^{\lambda x}}{u}\right) \frac{u}{e^{\lambda x}}, \quad u = u(x,t), \quad m = 1,2,\ldots,n-1.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных $\qquad Bu = u_t \qquad$ (1)

С учетом вида оператора B и коэффициентов p_m, считая $p_0 = 1$, уравнение (1) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} C_n^k C_k^i u \lambda^i D^{n-k} u \cdot D^{k-i} \left(\frac{1}{u}\right) = u_t - cu. \qquad (2)$$

Исследуем уравнение (2) на наличие свойства Пенлеве. Выполним замену

$$u = \frac{1}{g}. \qquad (3)$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} C_n^k C_k^i \frac{1}{g} \lambda^i D^{n-k} \left(\frac{1}{g}\right) D^{k-i} g = -\frac{g_t}{g^2} - \frac{c}{g}.$$

Умножая данное уравнение на $-g^2$ и выделяя слагаемые при $i = k$, получим

$$-\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \lambda^k g^2 D^{n-k} \left(\frac{1}{g}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} C_n^k C_k^i \lambda^i g D^{n-k} \left(\frac{1}{g}\right) D^{k-i} g = g_t + cg.$$

Воспользуемся в первой сумме формулой

$$D^m \left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g} \sum_{s=1}^{m} C_m^s D^s g D^{m-s} \left(\frac{1}{g}\right), \quad m = 1,2,\ldots,$$

которая доказывается методом матем. индукции. Выделяя слагаемые при $s = n-k$, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \lambda^k D^{n-k} g + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-k-1} C_n^k C_{n-k}^s \lambda^k g D^{n-k-s} \left(\frac{1}{g}\right) D^s g - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} C_n^k C_k^i \lambda^i g D^{n-k} \left(\frac{1}{g}\right) D^{k-i} g = g_t + cg. \quad (4)$$

Можно показать, что имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-k-1} C_n^k C_{n-k}^s \lambda^k g D^{n-k-s} \left(\frac{1}{g}\right) D^s g = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} C_n^k C_k^i \lambda^i g D^{n-k} \left(\frac{1}{g}\right) D^{k-i} g.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \lambda^k D^{n-k} g = g_t + cg. \qquad (5)$$

Уравнение (5) – линейное. Значит, оно не имеет подвижных критических особенностей. Тогда функция $u = \frac{1}{g}$ также не имеет подвижных критических особенностей. Но в тех точках [illegible], где $g(x,t) = 0$, u имеет полярные подвижные особенности однозначного характера.

Теорема Уравнение (2) имеет свойство Пенлеве.