R^m, f принадлежит C^1 и вогнута по y.

Интересно определить классы многозначных отображений F, таких чтобы функция максимума φ была дифференцируемой по направлениям. Последняя задача рассматривалась во многих работах. Основной результат был получен В. Демьяновым и А. Рубиновым [1], которые определили класс многозначных отображений, допускающих аппроксимации первого порядка. Другой класс слабо равномерно дифференцируемых многозначных отображений был введен в [2].

Цель работы – ввести новый больший класс многозначных отображений с требуемыми свойствами, который бы содержал два описанных выше класса.

Обозначим $\omega(x) = \{y \in F(x) : f(x,y) = \varphi(x)\}$.

Пусть $\bar{x} \in R^n$. Введем производную $DF(x,y;\bar{x})$ многозначного отображения F в точке $(x,y) \in grF$ по направлению $\bar{x}$:

$$DF(x,y;\bar{x}) = \{\bar{y} \in R^m : y + t\bar{y} + o(t) \in F(x+tv),\ t \ge 0\}.$$

Рассмотрим опорную функцию

$$S_F(x,p) = \sup\{\langle p,y\rangle : y \in F(x)\},\ \ p \in R^m,$$

и введем множество

$$M(x,y) = \{p \in R^m : \langle p,y\rangle = S_F(x,p)\}.$$

Для всех $p \in M(x,y)$, при которых опорная функция $S_F(x,p)$ дифференцируема по направлению $\bar{x}$ (относительно x) в точке x, можно ввести множество

$$\Gamma(x,y;\bar{x}) = \{\bar{y} \in R^m : \langle p,\bar{y}\rangle \le S'_F(x,p;\bar{x})\ \ \forall p \in M(x,y)\}.$$

Если $DF(x,y;\bar{x}) = \Gamma(x,y;\bar{x})$, будем говорить что многозначное отображение F Г-регулярно в точке (x,y) по направлению $\bar{x}$.

В работе показано, что многозначные отображения F, допускающие аппроксимацию первого порядка в точке $(x,y) \in grF$, и многозначные отображения, слабо равномерно дифференцируемые в точке $(x,y) \in grF$, Г-регулярны в этой точке.

Теорема. Пусть многозначное отображение F Г-регулярно во всех точках $(x,y) \in gr\omega$ по направлению $\bar{x}$, и пусть функция f вогнута по y. Тогда существует производная по направлению

$$\varphi'(x;\bar{x}) = \sup_{y\in\omega(x)} \sup_{\bar{y}\in DF(x,y;\bar{x})} \langle \nabla f(x,y),(\bar{x},\bar{y})\rangle = \sup_{y\in\omega(x)} \{\langle \nabla_x f(x,y),\bar{x}\rangle + S'_F(x,\nabla_y f(x,y);\bar{x})\}.$$

Литература

1. Demyanov V.F., Rubinov A.M. Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus, Nauka, Moscow, 1990.
2. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations. 2002, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London. 209 p.

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

С.В. Акимова

Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***Ю.В. Василевич***

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим однородное анизотропное тело, обладающее прямолинейной тепловой анизотропией и в каждой точке тремя плоскостями упругой симметрии, перпендикулярными к осям ортогональных координат x, y, z. Предположим, что оси координат образуют правую тройку и совпадают с главными направлениями теплопроводности; матрица коэффициентов упругости a_{ij} симметрична ($a_{ij} = a_{ji}$); компоненты деформации e_{ij} - малые величины. Температура $T(x,\ y,\ z)$ удовлетворяет уравнению

$$k_1\partial^2T/\partial x^2+k_2\partial^2T/\partial y^2+k_3\partial^2T/\partial z^2=0;$$

где k_i - коэффициенты теплопроводности.

На основе специального представления компонент напряжений и перемещений через квазигармонические функции $\Phi_k=\Phi_k(x,\ \mu_k y,\ \lambda_k z)$ и некоторые дифференцируемые функции $F_i=F_i(x,\ y,\ z)$ показано, что закон Гука для ортотропного тела и уравнения равновесия могут быть удовлетворены, если положить, что напряжения σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} и перемещения u, v, w выражаются по формулам

$$\sigma_x=(\partial^2/\partial y^2+\xi_k\partial^2/\partial z^2)\Phi_k+\partial^2F_1/\partial y^2+\partial^2F_3/\partial z^2,$$
$$\tau_{xy}=-\partial^2\Phi_k/\partial x\partial y-\partial^2\mathrm{F}_1/\partial x\partial y,$$
$$\sigma_y=(\partial^2/\partial x^2+\eta_k\partial^2/\partial z^2)\Phi_k+\partial^2F_1/\partial x^2+\partial^2F_2/\partial z^2,$$
$$\tau_{xz}=-\xi_k\partial^2\Phi_k/\partial x\partial z-\partial^2\mathrm{F}_3/\partial x\partial z,$$
$$\sigma_z=(\xi_k\partial^2/\partial x^2+\eta_k\partial^2/\partial y^2)\Phi_k+\partial^2F_3/\partial x^2+\partial^2F_2/\partial y^2,$$
$$\tau_{yz}=-\eta_k\partial^2\Phi_k/\partial y\partial z-\partial^2\mathrm{F}_2/\partial y\partial z,$$
$$u=P_{k1}\partial\Phi_k/\partial x-0{,}5\partial/\partial x(a_{66}F_1-a_{44}F_2+a_{55}F_3,$$
$$v=P_{k2}\partial\Phi_k/\partial y-0{,}5\partial/\partial y(a_{66}F_1+a_{44}F_2-a_{55}F_3,$$
$$w=P_{k3}\partial\Phi_k/\partial z-0{,}5\partial/\partial z(-a_{66}F_1+a_{44}F_2+a_{55}F_3,$$

где $P_{k1}=0{,}5(\eta_k a_{44}-\xi_k a_{55}-a_{66})$, $P_{k2}=0{,}5(\xi_k a_{55}-\eta_k a_{44}-a_{66})$,
$P_{k1}=0{,}5(a_{66}-\eta_k a_{44}-\xi_k a_{55})$, k - индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3;
$\xi_k, \eta_k, \mu_k, \lambda_k$ - выражаются через a_{ij}.

Полученные формулы удовлетворяют принципу предельного перехода к изотропному телу и служат базовыми соотношениями при решении основных граничных задач термоупругости ортотропного тела.

ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ СВАРКЕ

С.В. Акимова
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***Ю.В. Василевич***
Белорусский национальный технический университет

В результате действия сварочной дуги происходит сильный сосредоточенный нагрев свариваемых материалов. Тепло передается от точки к точке, и температурное поле в теле изменяется. Задача заключается в том, чтобы найти это изменяющееся температурное поле, т.е. найти совокупность температуры во всех точках тела в любой последующий момент времени. Чтобы найти температурное поле, надо кроме уравнения теплопроводности знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие).

Пусть в пластине неограниченных размеров действует сосредоточенный источник тепла мощностью

$$W=\frac{Q}{r}\delta_+(r)\delta_+(\varphi)\delta_+(z)\delta_+(t)$$

где $\delta_+(r)$, $\delta_+(\varphi)$, $\delta_+(z)$, $\delta_+(t)$ - асимметричные единичные импульсные функции. В этом случае температурное поле в пластине описывается дифференциальным уравнением вида [1]: