ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

О.А. Антонович
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***Н.А. Лукашевич***
Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x(b_{12}y - b_{33}z) = P(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y(b_{21}x - b_{12}y - b_{33}z) = Q(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z(b_{31}x + b_{12}y + b_{33}z) = R(x,y,z) \end{cases} \qquad (1)$$

где x, y, z – функции комплексного переменного t; a_{ij}, b_{ij} – комплексные числа ($i, j = 1,2,3$).

Поставим задачу: найти необходимые и достаточные условия при которых решения системы (1) не имеют подвижных критических особых точек (п.к.о.т.).

Исключая из системы переменную t, получим три уравнения, одно из которых – у-е Пфаффа

$$(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+b_{31}xz+b_{12}yz+b_{33}z^2)(dx+dy)+(-(a_{11}+a_{21})x-(a_{12}+a_{22})y-(a_{13}+a_{23})z-(b_{12}-b_{21})xy+ \\ +b_{33}xz+b_{12}y^2+b_{33}yz)dz=0. \qquad (2)$$

Одна из возможных матриц коэф-ов сист.(1), при которых у-е (2) вполне интегрируемо.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{22} & a_{13} & 0 & 0 & -b_{33} \\ -a_{11} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & -b_{33} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Докажем, что в этом случае решения (1) свободны от п.к.о.т. От системы (1) с учетом (3) перейдем к системе, которая, в свою очередь, может быть сведена к уравнению вида

$$\ddot{z} = A\dot{z}z + cz^3 + Dz^2 + Ez, \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = (a_{13} + a_{23})z - b_{33}z(x+y) \\ x + y = \dfrac{1}{a_{31}}\left(\dot{z} - a_{33}z - b_{33}z^2\right) \end{cases} \qquad (5)$$

где $A=b_{33}$, $C=b_{33}^2$, $D=a_{33}b_{33}$, $E=a_{33}$.

Для уравнения (5) при b_{33}=-1 выполняются необходимые условия отсутствия п.к.о.т.: A=-1, C=1. В этом случае уравнение (5) согласно [1, стр445-448] может быть сведено к одному из пяти указанных в [1] независимых случаев, решения которых не имеют п.к.о.т. Т.о. функция $z(t)$ является однозначной.

Из 1-го уравнения системы (1) выразим y через x и z, продифференцируем и, с учетом 2-го уравнения, получим

$$\ddot{x} = (-(a_{11} + a_{22}) + 2b_{33}z)\dot{x} + (b_{33}\dot{z}(t) - b_{33}(a_{11} + a_{22} - 1)z(t))x + \\ + \left(-a_{13}\dot{z}(t) + (a_{13} + a_{23})a_{22}z(t) - a_{13}b_{33}z^2(t)\right) \qquad (6)$$

Т.е. функция $x(t)$ является решением линейного уравнения, что, как известно, означает отсутствие у нее п.к.о.т. Аналогично можем построить линейное уравнение и для функции $y(t)$. Итак, показано, что необходимые условия отсутствия п.к.о.т. у решений системы (1) являются в данном случае и достаточным.

Литература.

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков. 1936.