АНАЛОГ ФОРМУЛЫ КОШИ ДЛЯ ДУАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЁХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

О.И. Васильева, О.И. Чернявская
Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент ***В.А. Шилинец***
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

Пусть D –односвязная область четырёхмерного действительного евклидова пространства (x,y,z). Рассмотрим дуальные функции вида

$$f = f_1(x,y,z,t) + if_2(x,y,z,t) + \varepsilon(f_3(x,y,z,t) + if_4(x,y,z,t)), p = x + iy + \varepsilon(z + it),$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – действительные функции класса $C^1(D), i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0$.

Определение. Дуальная функция f называется F-моногенной по дуальной функции p в области D ,если существует такая дуальная функция

$$\psi = \psi_1(x,y,z,t) + i\psi_2(x,y,z,t) + \varepsilon(\psi_3(x,y,z,t) + i\psi_4(x,y,z,t))$$

($\psi_i(x,y,z,t)$ $(i = 1,2,3,4)$ –однозначная действительная функция точки $\tau = (x,y,z,t)$ области D), что всюду в D выполняется равенство

$$df(\tau) = \psi(\tau)dp(\tau).$$

Краевая задача. Пусть υ –четырёхмерная ограниченная область с границей $\sigma(\sigma \subset D, \upsilon \subset D)$. Далее считаем, что p и функция f , F-моногенная по p, определены на замкнутой трёхмерной поверхности σ, гомеоморфной сфере конечного диаметра и достаточно гладкой для возможности использовать формулу Остроградского. Требуется найти в любой внутренней точке области υ значение функции f, F-моногенной по p, если известны её значения на поверхности σ.

Для дуальной функции f и любой точки $M(x^0, y^0, z^0, t^0)$, которая не принадлежит поверхности σ, полагаем:

$$I_\sigma = \int\limits_\sigma \left\{ \sum_{k=1}^{4} \left[\alpha_k \left(\frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \right\} f d\sigma,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ –направляющие косинусы внешней нормали к поверхности σ в её текущей точке $N(x,y,z,t)$, $r = \sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + (z-z^0)^2 + (t-t^0)^2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_i^0}{r^4}$ $(i = 1,2,3,4)$,

$$x = x_1,\ y = x_2,\ z = x_3,\ t = x_4.$$

Пусть M –любая данная точка области $D, M \notin \overline{\upsilon}$.

Теорема 1. Если дуальная функция f – F-моногенная по дуальной функции p в области D, то $I_\sigma = 0$.

Теорема 2. Если дуальная функция f является F-моногенной по дуальной функции p в области D, то для любой точки M, лежащей внутри υ, имеем,

$$f(M) = \frac{1}{\omega}\int\limits_\sigma [\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \alpha_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + i(\alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}) + \varepsilon(\alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{x_3}) +$$

$$+ i\varepsilon(\alpha_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4})] f d\sigma,$$

где ω - площадь единичной трёхмерной сферы. При помощи теор. 2 решается сформулир. краевая задача.