О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер
Научный руководитель– д.ф.-м.н., профессор ***И.П. Мартынов***
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned}y^4y^V &= a_1y^3y'y^{IV}+a_2y^3y''y'''+a_3y^2y'^2y'''+a_4y^2y'y''^2+a_5yy'^3y''+a_6y'^5+a_7y^5y^{IV}+\\&+a_8y^4y'y'''+a_9y^4y''^2+a_{10}y^3y'^2y''+a_{11}y^2y'^4+a_{12}y^6y'''+a_{13}y^5y'y''+a_{14}y^4y'^3+a_{15}y^7y''+\\&+a_{16}y^6y'^2+a_{17}y^8y',\ a_{17}\neq 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Для (1) упрощенным будет уравнение

$$y^4y^V = a_1y^3y'y^{IV}+a_2y^3y''y'''+a_3y^2y'^2y'''+a_4y^2y'y''^2+a_5yy'^3y''+a_6y'^5, \tag{2}$$

где $y=y(x)$, инвариантное относительно преобразования $(x,y;\lambda x,\lambda^{-1}y)$.

В [1] для (2) найдено одно из достаточных условий наличия алгебраического первого интеграла.

$$a_1=a-(4\nu-5),\ a_2=a+2b,\ a_3=c+(4\nu-6)a,\ a_4=2c+(4\nu-6)b,\ a_5=4d+(4\nu-7)c,\ a_6=(4\nu-8)d \tag{3}$$

Считая условия (3) для (1) выполненными, будем искать решения уравнения (1) в виде ряда

$$y=h_0\tau^{-1}+\cdots+h\tau^{r-1}+\cdots,\ \tau=z-z_0, \tag{4}$$

где $h_0\neq 0$.

Подставляя (4) в (1), для h_0 и r получим соотношения

$$\begin{aligned}&a_{17}h_0^4-[2a_{15}+a_{16}]h_0^3+[6a_{12}+2a_{13}+a_{14}]h_0^2-[24a_7+6a_8+4a_9+2a_{10}+a_{11}]h_0+\\&+a_6+2a_5+4a_4+6a_3+12a_2+24a_1-120=0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$(r+1)[r^4-M_ir^3+K_ir^2-N_ir+G_i]=0, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}&M_i=16-a_1+a_7h_{0i},\ K_i=101-11a_1-2a_2-a_3+(11a_7+a_8)h_{0i}-a_{12}h_{0i}^2,\\&N_i=326-46a_1-20a_2-7a_3-4a_4-a_5+(46a_7+7a_8+4a_9+a_{10})h_{0i}-(7a_{12}+a_{13})h_{0i}^2+\\&+a_{15}h_{0i}^3,\ G_i=600-120a_1-60a_2-30a_3-20a_4-10a_5-5a_6+(96a_7+24a_8+\\&+16a_9+8a_{10}+4a_{11})h_{oi}-(18a_{12}+6a_{13}+3a_{14})h_{oi}^2+(4a_{15}+2a_{16})h_{0i}^3-a_{17}h_{0i}^4,\end{aligned} \tag{7}$$

h_{0i} – различные корни уравнения (5).

Пусть $r=4\nu$ – общий корень уравнения (6) при всяком h_{0i}, где $i=\overline{1,4}$.

Тогда для $a_i, i=\overline{7,17}$, найдем

$$\begin{aligned}&a_8=a_9+(4\nu-4)a_7,\ a_{10}=3p+(4\nu-5)a_9,\ a_{11}=p(4\nu-6)a_{11}=2m+(4\nu-3)a_{12},\\&a_{14}=m(4\nu-4),\ a_{16}=(4\nu-2)a_{15}\end{aligned} \tag{8}$$

Умножая уравнение (1) с учетом (3) и (8) на интегрирующий множитель $A=y^{4\nu-9}$ и интегрируя, будем иметь

$$\begin{aligned}y^{4\nu-5}y^{IV}&=ay^{4\nu-6}y'y'''+by^{4\nu-6}y''^2+cy^{4\nu-7}y'^2y''+dy^{4\nu-8}y'^4+a_7y^{4\nu-4}y'''+a_9y^{4\nu-5}y'y''+\\&+py^{4\nu-6}y'y'^3+a_{12}y^{4\nu-3}y''+my^{4\nu-4}y'^2+a_{15}y^{4\nu-2}y'+\frac{a_{17}}{4\nu}y^{4\nu}+K,\end{aligned}$$

где K– постоянная интегрирования.

Литература

1. Мартынов И.П., Можджер Г.Т. О первых интегралах одного уравнения 5-го порядка.// Вестник ГрГУ. Сер. 2.–2001.–№6.–С.3 – 7.