МЕТОД ПОТОКОВОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.И. Швакель
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор ***П.И. Монастырный***
Белорусский государственный университет

Сеточные уравнения с сильно меняющимися коэффициентами имеют многочисленные применения в задачах динамики и магнитной гидродинамики, где необходим расчёт теплопроводности или электропроводимости, в условиях, когда коэффициенты теплопроводности и электропроводности сильно зависят от термодинамических параметров среды [1 – 3]. Часто в таких задачах, помимо самого решения, требуется найти ещё и поток.

Попытка решения сеточных уравнений второго порядка, к которым обычно сводятся такие граничные задачи, методом монотонной прогонки [4 – 6] приводит к значительным потерям точности при вычислении функции потока или к невозможности применения метода из-за появления в прогоночных коэффициентах разрывов второго рода. В ряде случаев эти недостатки удаётся устранить при дополнительных ограничениях путём перехода к потоковому вариан-ту метода прогонки [1 – 4]. Так в работах [1, 3] для трёхточечных разностных уравнений вида:

$$K_i w_i - L_i w_{i+1} - M_i y_i = -F_i, \; w_{i+1} = -\frac{y_{i+1} - y_i}{\sigma_{i+1}},$$

$$y_0 = -\bar{\lambda}^{(1)} w_0 + \bar{\nu}^{(1)}, \; \bar{\lambda}^{(1)} \ge 0, \; y_N = \bar{\lambda}^{(2)} w_N + \bar{\nu}^{(2)}, \; \bar{\lambda}^{(2)} \ge 0$$

были построены вычислительные схемы монотонной потоковой прогонки, корректной и устойчивой при $K_i \ge L_i > 0$, $M_i > 0$, а в [2] предложены формулы прогонки, кроме обычных ограничений требующей ещё специального выделения области, в которой коэффициент теплопроводности бесконечен. Кроме того, во всех работах [1...6] для обеспечения устойчивости прогонки используется условие монотонности разностных операторов и последующее их обращение, что также накладывает довольно жёсткие ограничения на параметры и вид сеточных задач.

Целью проведённых автором исследований стала разработка вычислительной схемы разностной прогонки, позволяющей существенно расширить класс решаемых сеточных граничных задач с сильно меняющимися коэффициентами и обеспечить устойчивость при более слабых, чем традиционные [1...5], ограничениях. Используя ортогональные преобразования, связывающие искомую сеточную функцию и поток с вспомогательными сеточными функциями, которые определяются как решение сеточных задач Коши, согласованных по своим свойствам с искомыми значениями решения и потока, такая вычислительная схема разностной прогонки была построена и названа методом ортогональной потоковой прогонки (МОПП).

Следует отметить, что при обосновании корректности и доказательстве устойчивости в малом [7] МОПП, свойства монотонности не использовались, поскольку в данном случае важный для схем прогонки переход от основных функций к вспомогательным и обратно, в силу ортогональности преобразующей матрицы, является всегда невырожденным и не связан с использованием свойств монотонности, следовательно, вычислительная схема МОПП является более универсальной и применима для решения даже тех сеточных уравнений с сильно меняющимися коэффициентами, к которым другие варианты метода прогонки не применимы.

Литература

1. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 679 – 684.
2. Калиткин Н. Н. //ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 684 – 686.
3. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. //ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 1. С. 211 – 218.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1989.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
6. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Мн., 1975. Т. 2.
7. Кремень Ю. А., Монастырный П. И.// Доклады АН БССР. 1991. Т. 35. № 7. – С. 589–593.