Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, -М.: Наука, 1977. –736 с.

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.А. Данилюк, Г.С. Карпович

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент ***В.А. Акимов***

Белорусский национальный технический университет

В учебной литературе [1] известны различные постановки граничных задач с начальными условиями при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Эти процессы описываются дифференциальными уравнениями с частными производными второго порядка и в одномерном случае имеют вид $[1, c.20]$:

$$u_t - C^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2}$$

будем разыскивать в следующей операторной форме:

$$u = \left[A_1(d_x)\exp\left(tC^2 d_x^2\right)\right] * f_1(x) + \left[A_2(d_x)\exp\left(tC^2 d_x^2\right)\right] * f_2(x) \tag{3}$$

где $d_x = \dfrac{d}{d_x}$, t – время.

Построенное решение тождественно удовлетворяет уравнению (1) при произвольных бесконечно дифференцируемых функциях $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Звездочкой обозначена операция операторного дифференцирования.

Придавая аналитическим функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ различный вид, можно получить как известные, так и новые решения. Авторы данной работы строят новое решение для случая $f_1(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k$ и $f_2(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k x^k$, не рассматриваемого в учебной литературе.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, -М.: Наука, 1977. –736 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

А.С. Романович

Научный руководитель – к.п.н. ***Е.Л. Ерошевская***

Белорусский национальный технический университет

Пусть требуется вычислить приближенно значение интеграла

$$I = \iint\limits_{\Omega} \ldots \int f(P)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n ,$$

где $P = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ - точка n-мерного пространства. Без ограничения общности можно считать, что область $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in [0;1], i = \overline{1,n}\}$ - n-мерный единичный куб.

Если P_j - последовательность случайных попарно независимых точек, равномерно распределенных в кубе Ω, то случайные величины $S_j = f(P_j)$ попарно независимы и одинаково распределены, причем

$$M(S_j)=\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(P)dx_1dx_2\ldots dx_n\,,$$

$$D(S_j)=\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f^2(P)dx_1dx_2\ldots dx_n-(M(S_j))^2=D\,,$$

т.е. математическое ожидание введенных величин совпадает с искомым значением интеграла. Рассмотрим случайную величину $S_N=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j$.

В силу попарной независимости случайных величин S_j получаем

$$M(S_N)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j=M(S_j)=\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(P)dx_1dx_2\ldots dx_n\,,$$

$$D(S_N)=\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}D(S_j)=\frac{1}{N}D\,.$$

Если точки P_j независимы в совокупности, то на основании центральной предельной теоремы случайная величина $\frac{(S_N-I)}{\sqrt{D/N}}$ распределена асимптотически нормально. Зададим доверительную вероятность α=0,95. Для нормально распределенной случайной величины ξ выполняется

$$P(|\xi|<1{,}96)=0{,}95$$

Таким образом, при больших N с вероятностью близкой к 0,95 выполняется неравенство

$$|S_N-I|\le 1{,}96\sqrt{D/N}\,.$$

Величина D в правой части известна, но ее можно оценить и по формуле

$$D=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j^2-\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}S_j\right)^2$$

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

М.В. Васько

Научный руководитель – к.т.н., доцент ***Н.П. Воронова***

Белорусский национальный технический университет

При вычислении однократных интегралов обычно приводится оценка погрешностей на некотором классе функций. Так, для формулы трапеций эта погрешность на классе функций, имеющих вторую производную, имеет вид:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a;b]}|f''(x)|,$$

где $[a;b]$ - отрезок интегрирования, n - число узлов интегрирования. Эта оценка считается гарантированной оценкой погрешности.

При переходе к многомерным интегралам возникают две проблемы: 1) трудно получить замкнутые выражения для гарантированных оценок; 2) если такая оценка получена, то для ряда классов функций она оказывается практически бесполезной, т.к. для достижения заданной гарантированной погрешности квадратурная формула должна содержать настолько большое число узлов, что выполнить вычисления практически невозможно.

Для преодоления этих трудностей можно отказаться от строгой гарантированной оценки погрешности и ограничиться получением оценки погрешности лишь с определенной степенью достоверности.

Одним из методов вычисления интеграла, при котором погрешность оценивается не