Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Математические методы в строительстве»

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» РАЗДЕЛ «КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

для студентов специальностей
7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств»
7-07-0714-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых

Составители: Ерошевская Е.Л., Кузнецова А.А.

Минск БНТУ 2024

Перечень материалов

Теоретическая часть, практическая часть, контрольные вопросы, контрольные задания.

Пояснительная записка

Цели ЭУМК:

- повышение эффективности образовательного процесса;
- оптимизация работы студентов и преподавателей по теме «Криволинейные интегралы»;
- систематизация теоретического и практического материала для аудиторной, домашней работы, контроля знаний;
- возможность дополнительного самообразования по курсу «Математика».

Структурирование и подача учебного материала. ЭУМК содержит лекционный материал, а также задания для аудиторной и самостоятельной работы, контрольные вопросы и тестовые задания. В качестве примеров приведены задачи с решениями. Рисунки выполнены в программе Wolfram Mathematica. ЭУМК содержит теоретический, практический, вспомогательный раздел и раздел по контролю знаний студентов.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК:

Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Структура комплекса позволяет изучить теоретический материал и рассмотреть уже решенные примеры. В конце ЭУМК приведены контрольные вопросы и тестовые задания.

Оглавление

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Кусочно-гладкая ориентированная кривая

Пусть задана кривая L в пространстве $\mathbb{R}^3$, $(L \subset \mathbb{R}^3)$. Векторное уравнение этой кривой L:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \tag{1.1}$$

эквивалентно заданию трех уравнений

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta. \tag{1.2}$$

Определение 1: *Кривая $L \subset \mathbb{R}^3$ называется гладкой, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$ и имеют на $[\alpha;\beta]$ непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в нуль.*

Если же функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *в каких-то точках не имеют непрерывных производных, то вводят понятие кусочно-гладкой кривой.*

Определение 2: *Кривая L называется кусочно-гладкой кривой, если функции, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$ и отрезок $[\alpha;\beta]$ можно разбить точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ на конечное число отрезков, на каждом из которых функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в нуль.*

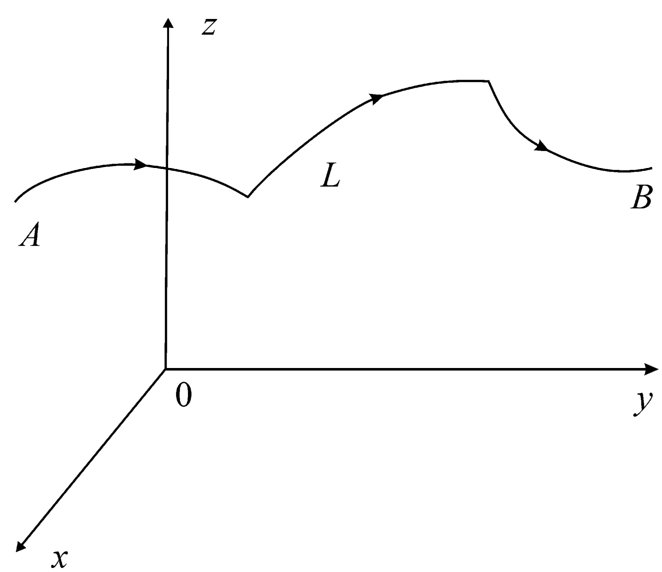


Рис. 1

Определение 3: *Кривая L называется ориентированной (направленной), если параметр t непрерывно возрастает от α к β ($\alpha < \beta$).*

На Рис. 1 точка $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ - начальная точка L, точка $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ - конечная точка L; стрелка указывает ориентацию L. Ту же кривую, но противоположной ориентацию (BA), обозначим символом L_{-}.

Определение 3: *Ориентированная кривая называется замкнутой , если $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$ или $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$, $z(\alpha) = z(\beta)$, т.е. если точки A и B совпадают.*

2. Определение криволинейного интеграла I рода (КРИ I)

Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая кривая L

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \ (0 \le t \le T),$$

и пусть на L или в окрестности L определена непрерывная функция $F(x, y, z)$. Разобьем кривую L произвольным способом точками $A = M_0, M_1, M_2 ... M_n = B$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1,n})$. Обозначим через $\Delta\ell_i$ длину вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и $\lambda = \max\{\Delta\ell_i\}$ $(i = \overline{1,n})$. На каждой дуге возьмем произвольную точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ (Рис. 2). Умножим значение функции $F(x, y, z)$ в точке $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на длину $\Delta\ell_i$ соответствующей элементарной дуги и получим следующее произведение $F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\ell_i$.

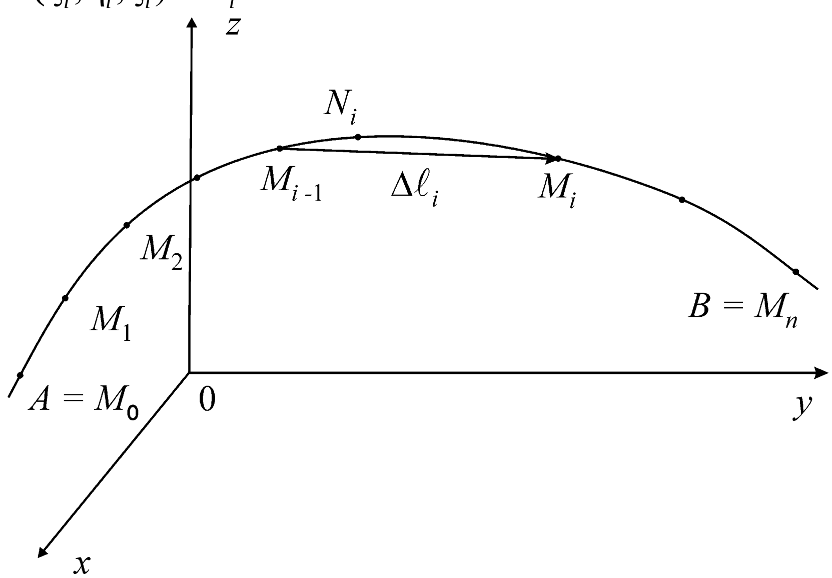


Рис. 2

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\ell_i\,, \tag{2.1}$$

которая называется n-ой интегральной суммой. Предел интегральной суммы (2.1) при $\lambda \to 0$ называется криволинейным интегралом по длине дуги L от функции $F(x, y, z)$ или криволинейным интегралом первого рода (КРИ I).

$$\int_L F(x, y, z) d\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta\ell_i \tag{2.2}$$

КРИ I от функции по кривой L есть число, равное $\int\limits_L F(x, y, z) d\ell$, где $d\ell$ - дифференциал длины дуги кривой.

Если кривая L лежит в плоскости Oxy, то по определению КРИ I имеем

$$\int_L F(x, y) d\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\ell_i\,. \tag{2.3}$$

Кривая L может быть замкнутой. Тогда для обозначения криволинейного интеграла используется обозначение $\oint\limits_L F(x, y) d\ell$ или $\oint\limits_L F(x, y, z) d\ell$.

Отметим, что КРИ I всегда существует, если подынтегральная функция $F(x, y)$ или $F(x, y, z)$ непрерывны во всех точках кривой L.

КРИ I обладает следующими свойствами:

1. $\int\limits_L (F_1(x, y, z) \pm F_2(x, y, z)) d\ell = \int\limits_L F_1(x, y, z) d\ell \pm \int\limits_L F_2(x, y, z) d\ell$.

2. $\int\limits_L kF(x, y, z) d\ell = k \int\limits_L F(x, y, z) d\ell$.

3. При изменении направления интегрирования КРИ I не изменяет своего значения, т.е. если под AB и BA понимать разнонаправленные линии, то

$$\int_{AB} F(x, y, z) d\ell = \int_{BA} F(x, y, z) d\ell.$$

4. Если кривая L состоит из двух линий L_1 и L_2, то

$$\int_L F(x, y, z) d\ell = \int_{L_1} F(x, y, z) d\ell + \int_{L_2} F(x, y, z) d\ell.$$

5. Существует точка $P(x_0, y_0, z_0) \in L$ такая, что $\int\limits_L F(x,y,z)d\ell = F(x_0, y_0, z_0) \cdot \ell$, где в данном случае ℓ - длина кривой (теорема о среднем).

3. Геометрический смысл КРИ I

Если $F(x,y) \geq 0$, то криволинейный интеграл $\int\limits_L F(x,y)d\ell$ от непрерывной функции $z = F(x,y)$ численно равен площади части цилиндрической поверхности с направляющей L и образующими, параллельными оси $0z$ и имеющими переменную длину $F(M)$.

4. Физический смысл КРИ I

Если считать линию $L \subset \mathbb{R}^2$ материальной, а $F(x,y) > 0$, то криволинейный интеграл $\int\limits_L F(x,y)d\ell$ от непрерывной функции численно равен **массе дуги линии** L с переменной плотностью $\gamma = F(x,y)$, т.е.

$$M_L = \int\limits_L \gamma(x,y)\, d\ell\,. \tag{4.1}$$

Для $L \subset \mathbb{R}^3$ и $\gamma = F(x,y,z)$ масса дуги линии вычисляется по формуле

$$M_L = \int\limits_L \gamma(x,y,z)\, d\ell\,. \tag{4.2}$$

Если $F(x,y) \equiv 1$ или $F(x,y,\mathrm{z}) \equiv 1$, то КРИ I численно равен **длине дуги** ℓ

$$\ell = \int\limits_L d\ell\,. \tag{4.3}$$

Координаты центра масс дуги вычисляются по следующим формулам:

для плоской кривой $L \subset \mathbb{R}^2$**:** $x_C = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\int\limits_L \gamma x d\ell}{\int\limits_L \gamma d\ell}$, $y_C = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\int\limits_L \gamma y d\ell}{\int\limits_L \gamma d\ell}$, (4.4)

для пространственной кривой $L \subset \mathbb{R}^3$**:**

$$x_C = \frac{M_{Oyz}}{M} = \frac{\int_L \gamma x d\ell}{\int_L \gamma d\ell} \qquad y_C = \frac{M_{Oxz}}{M} = \frac{\int_L \gamma y d\ell}{\int_L \gamma d\ell} \qquad z_C = \frac{M_{Oxy}}{M} = \frac{\int_L \gamma z d\ell}{\int_L \gamma d\ell}. \qquad (4.5)$$

Момент инерции относительно оси Ox: $I_x = \int_L y^2 d\ell$. (4.6)

Момент инерции относительно оси Oy: $I_y = \int_L x^2 d\ell$. (4.7)

5. Вычисление КРИ I

Вычисление КРИ I сводится к вычислению определенного интеграла, если воспользоваться формулами для вычисления дифференциала $d\ell$ длины дуги. Рассмотрим следующие случаи:

1. **Кривая** $L \subset \mathbb{R}^2$ **задана уравнением вида** $y = y(x)$**,** $a \le x \le b$**.** Функции $y = y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны для $x \in [a;b]$. Тогда $d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ и

$$\int_L F(x,y)d\ell = \int_a^b F(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \qquad (5.1)$$

2. **Кривая** $L \subset \mathbb{R}^2$ **задана уравнением вида** $x = x(y)$**,** $c \le y \le d$**.** Функции $x = x(y)$ и $x'(y)$ непрерывны для $y \in [c;d]$. Тогда $d\ell = \sqrt{1 + x'^2(y)}dy$ и

$$\int_L F(x,y)d\ell = \int_c^d F(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy. \qquad (5.2)$$

3. **Кривая** $L \subset \mathbb{R}^2$ **задана параметрическими уравнениями** $x = x(t)$**,** $y = y(t)$**,** $t \in [t_1;t_2]$**.** Функции $x(t)$, $y(t)$ и их производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны для $t \in [t_1;t_2]$. Тогда $d\ell = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ и

$$\int_L F(x,y)d\ell = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (5.3)$$

4. **Кривая** $L \subset \mathbb{R}^3$ **задана параметрическими уравнениями** $x = x(t)$**,** $y = y(t)$**,** $z = z(t)$**,** $t \in [t_1; t_2]$**.** Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и их производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ непрерывны для $t \in [t_1; t_2]$. Тогда \ $d\ell = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$ и

$$\int_L F(x, y, z)d\ell = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt\,. \qquad (5.4)$$

5. **Кривая** $L \subset \mathbb{R}^2$ **задана уравнением в полярных координатах** $r = r(\varphi)$**,** $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$**.** Тогда $d\ell = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$. Учитывая формулы перехода от декартовой системы координат к полярной:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x'(\varphi) = -r\sin\varphi,\ y'(\varphi) = r\cos\varphi,$$

$$\int_L F(x, y)d\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi\,. \qquad (5.5)$$

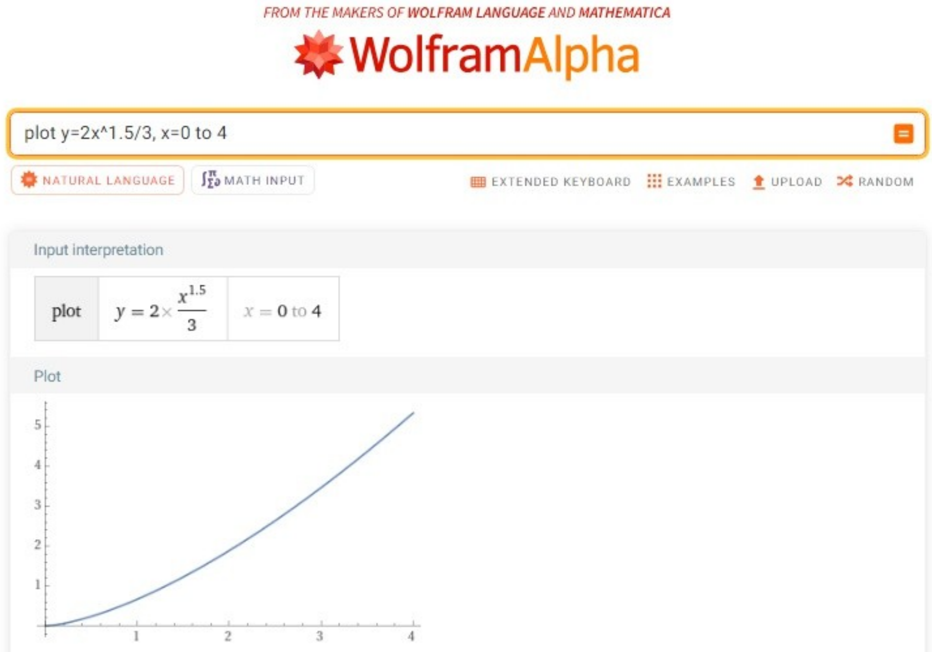
6. Примеры вычисления КРИ I.

Пример 1: Найти массу дуги кривой $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ от точки (0, 0) до (4, 16/3), если линейная плотность кривой пропорциональна длине ее дуги.

Решение. Как известно, масса дуги кривой вычисляется по формуле (4.1). По условию линейная плотность пропорциональна длине дуги. При этом длина дуги $L = \int_L d\ell$ и ее дифференциал $d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$.

Выполним промежуточные действия. Уравнение линии задано в явном виде $y = y(x)$. Найдем $y'(x)$: $y = \dfrac{2x\sqrt{x}}{3} = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$, тогда $y'(x) = \dfrac{2}{3}(x^{3/2})' = x^{1/2}$. $d\ell = \sqrt{1 + (x^{1/2})^2}dx = \sqrt{1+x}dx$, и так как плотность в точке пропорциональна длине дуги, верхний предел интегрирования записываем переменным. Длина дуги $L = \int_L d\ell = \int_0^x \sqrt{1+x}dx = \int_0^x (1+x)^{\frac{1}{2}}d(1+x) = \dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x = \dfrac{2}{3}((1+x)^{\frac{3}{2}} - 1)$, и тогда плотность равна $\gamma(x, y) = \dfrac{2}{3}((1+x)^{3/2} - 1)\cdot K$, где K --коэффициент пропорциональности.

Масса дуги при этом будет записана следующим образом:



$$M_L = \int_L \gamma(x,y)d\ell = \int_L \frac{2}{3}((1+x)^{3/2}-1)Kd\ell = \frac{2}{3}K\int_L ((1+x)^{3/2}-1)d\ell =$$

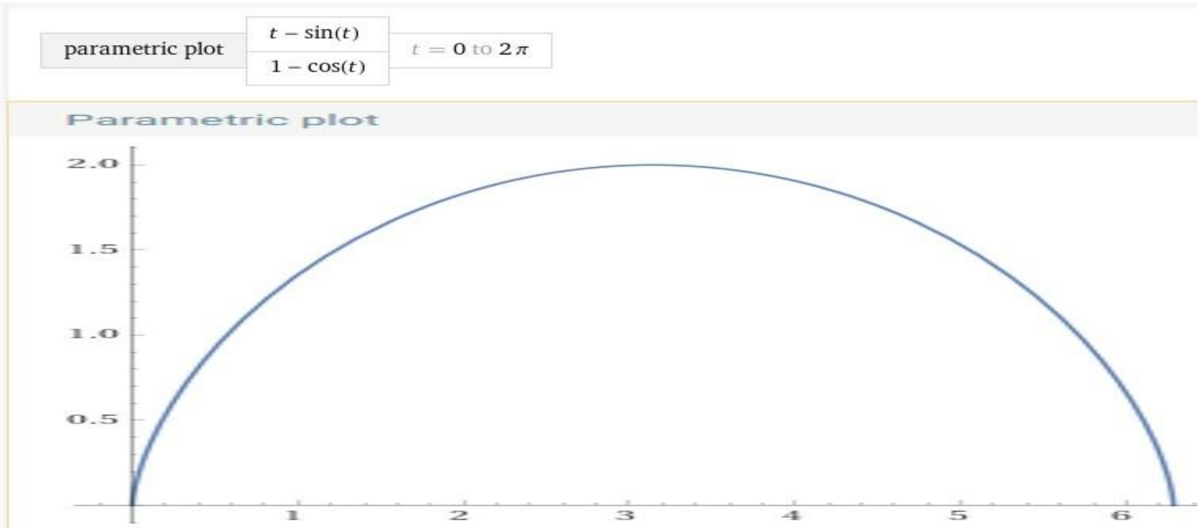
$$= \frac{2}{3}K\int_0^4 ((1+x)^{3/2}-1)\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}K\left(\frac{(1+x)^3}{3} - \frac{2(1+x)^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{2}{9}K\left(\left(\frac{5^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)-2(5^{3/2}-1^{3/2})\right) = \frac{4}{9}K(63-5\sqrt{5}).$$

Пример 2: Найти момент инерции арки циклоиды L: $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ при $(0 \le t \le 2\pi)$ относительно оси Ox.

Решение. Момент инерции вычисляем по формуле $I_x = \int_L y^2 d\ell$.

Учитывая, что кривая задана параметрическими уравнениями, вычисляем $d\ell = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$ для этого находим $x'(t) = a(1-\cos t)$ и $y'(\text{t}) = a\sin t)$.



Подставляем в формулу

$$d\ell = \int \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int \sqrt{(1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int \sqrt{(2-2\cos t)}dt = \sqrt{2}a\int \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt\,.$$

Далее вычисляем $I_x = 2a\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sin\frac{t}{2}dt = \left[1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}\right] =$

$$= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt = \left[d(\cos\frac{t}{2}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt\right] =$$

$$= -16a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2 d(\cos\frac{t}{2}) = -16a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2})d(\cos\frac{t}{2}) =$$

$$= -16a^3(\cos\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\cos^5\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = \frac{256}{15}a^3\,.$$

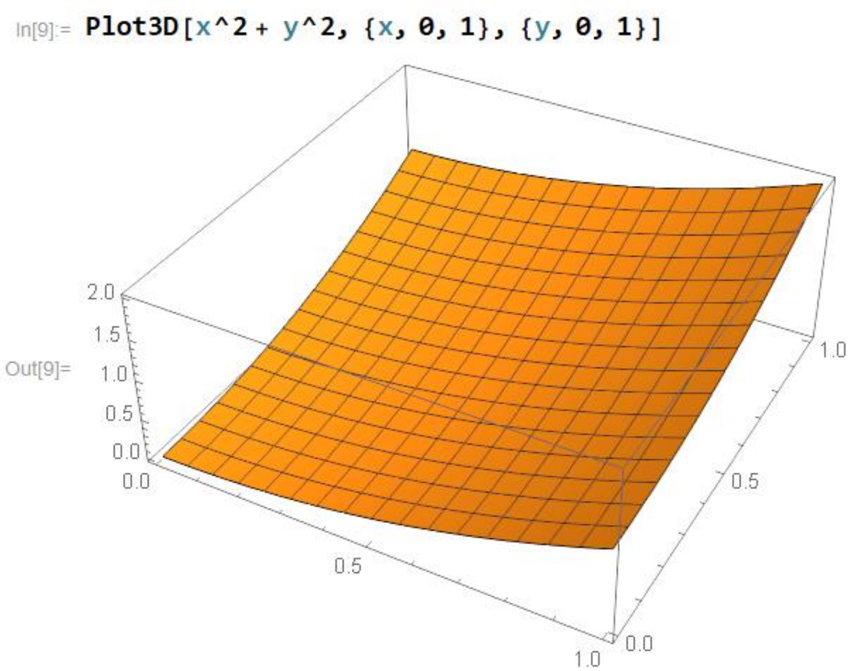
Пример 3. Найти площадь забора, построенного на границе L квадрата $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, высота которого в точке $(x, y) \in L$ равна $z = x^2 + y^2$.

Решение. Стороны квадрата *OABC* можно описать следующими уравнениями: *AB*: $x = 1$; *OC*: $x = 0$; *CB*: $y = 1$, *OA*: $y = 0$. Учитывая геометрический смысл КРИ I, $S = \int\limits_L F(x, y)d\ell$, вычисляем КРИ I отдельно по каждой стороне квадрата *OABC*.

Для стороны *OA*, соответствующая кривая имеет вид: $y = 0$ и $d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ (дифференциал длины дуги), $y'(x) = 0$. Тогда $d\ell = dx$ и далее, воспользовавшись формулой (2.11) имеем

$$S = \int_L F(x,y)d\ell = \int_a^b F(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

В нашем случае $S = \int_a^b (x^2+y^2)d\ell$.



Для стороны *OA* получим следующее выражение для площади:

$$S_{OA} = \int_0^1 (x^2+y^2)dx = \left[OA: y=0\right] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Для стороны *CB* получаем уравнение стороны, дифференциал длины дуги и выражение для площади соответственно:

$$y=1,\ d\ell = dx,\ S_{CB} = \int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\text{CB}: y=1\right] = \frac{4}{3}.$$

Для стороны *OC* получим следующие выражения: $x=0$ и $d\ell = \sqrt{1+x'^2(y)}dy$, тогда $d\ell = dy$

$$S_{OC} = \int_0^1 y^2 dy = \left[OC: x=0\right] = \frac{1}{3}.$$

Для стороны *AB* получим следующие выражения: $x=1$, $d\ell = dy$

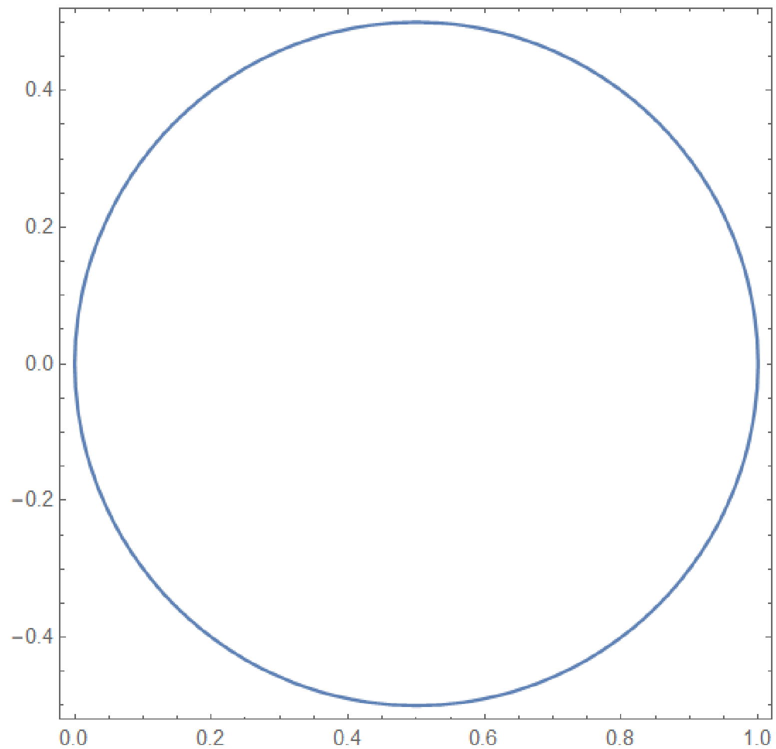
$$S_{AB}=\int_0^1(1+y^2)dy=\left[AB:x=1\right]=\frac{4}{3}.$$

Тогда $S=S_{OA}+S_{AB}+S_{BC}+S_{OC}=\dfrac{10}{3}$.

Пример 4. Найти массу дуги кривой $x^2+y^2=ax$, если линейная плотность $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

```
In[13]:= ContourPlot[x^2 + y^2 - x == 0, {x, 0, 1}, {y, -0.5, 0.5}]
```

Out[13]=



Решение. Для вычисления массы дуги окружности $x^2+y^2=ax$ запишем уравнение окружности в полярной системе координат, учитывая, что $x=r\cos\varphi$, $x=r\cos\varphi$. Тогда уравнение окружности $x^2+y^2=ax$ будет выглядеть следующим образом $r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=ar\cos\varphi$, $r=a\cos\varphi$. Дифференциал длины дуги кривой вычисляем по формуле $d\ell=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$. При этом $r'(\varphi)=-a\sin\varphi$. После подстановки получаем $d\ell=ad\varphi$ и плотность $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в полярной система координат имеет вид $\rho(x,y)=r$.

Масса дуги вычисляется, как уже было указано выше, по формуле (4.1). Тогда подставляя все полученные промежуточные выражения, получим:

$$M_L = \int_L r a d\varphi = \left[r = a\cos\varphi \right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos\varphi d\varphi = a^2 \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2a^2.$$

7. Определение криволинейного интеграла II рода

Зададим в пространстве $\mathbb{R}^3$ ориентированную гладкую кривую AB и пусть в каждой точке этой кривой $(x, y, z) \in AB$ определена вектор-функция $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ - непрерывные функции на кривой AB (Рис. 3).

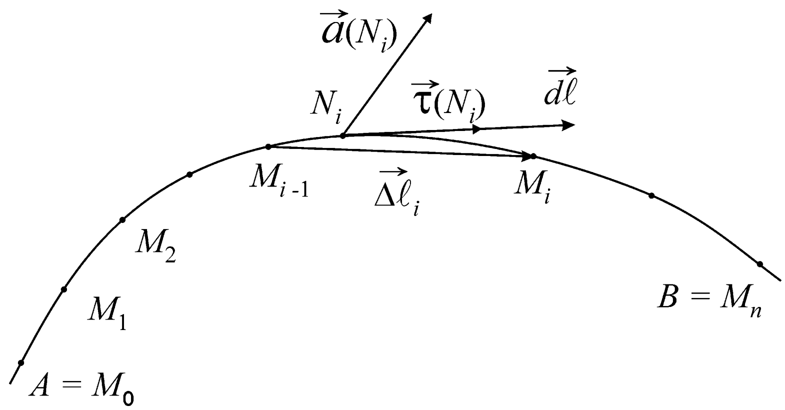


Рис.3

Направление вектора $\bar{a}$ и его длина зависят от точки (x, y, z), принадлежащей AB. Разобьем кривую AB произвольным способом точками $A = M_0, M_1, M_2 ... M_n = B$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1, n})$. Обозначим векторы $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \overrightarrow{\Delta\ell_i}$ и $\lambda = \max\left\{\Delta\ell_i\right\}$ максимум их длин ($i = \overline{1, n}$). На каждой дуге возьмем произвольную точку $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и найдем значение вектор-функции в этой точке $\vec{a}(N_i)$. Составим сумму скалярных произведений векторов $\vec{a}(N_i)$ и $\overrightarrow{\Delta\ell_i}(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(N_i), \overrightarrow{\Delta\ell_i}), \tag{7.1}$$

которая называется n-ой интегральной суммой (и является скалярной величиной).

Предел интегральной суммы (7.1) при $\lambda \to 0$ *(*$n \to \infty$*), если он существует, конечен и не зависит от способа разбиения кривой AB на элементарные дуги*

$M_{i-1}M_i$ и от выбора точек $N_i \in M_{i-1}M_i$, называется криволинейным интегралом II рода (в векторной форме) и его обозначают $\int\limits_{AB}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell})$ или $\int\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell})$.

Следовательно, по определению

$$\int\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell}) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}(N_i),\overrightarrow{\Delta\ell_i}), \tag{7.2}$$

где $\overrightarrow{d\ell}$ - вектор, имеющий направление касательного вектора $\vec{\tau}$ и длину, равную длине дуги $d\ell$ (рис.2).

Записав скалярное произведение векторов $\vec{a}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ и $\overrightarrow{d\ell}(dx,dy,dz)$ через координаты, получим

$$\int\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{L}P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \tag{7.3}$$

Правую часть (7.3) называют криволинейным интегралом II рода в координатной форме или криволинейным интегралом по координатам.

Замечание.

1. Если кривая L замкнутая, то криволинейный интеграл II рода записывают в виде $\oint\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell})$.

2. Если ориентированная гладкая кривая L задана в пространстве $\mathbb{R}^2$ (на плоскости), то криволинейный интеграл II рода имеет вид:

$$\int\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{L}P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{7.4}$$

8. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть

$$\int\limits_{L}(\vec{a},\overrightarrow{d\ell}) = \int\limits_{L}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \tag{8.1}$$

- криволинейный интеграл второго рода.

Касательный вектор к кривой L, заданной уравнением (1.1) или (1.2), имеет координаты $\vec{\tau}=(x'(t),y'(t),z'(t))$. Нормируя его, получим единичный вектор $\vec{\tau^0}$ касательной $\vec{\tau^0}=\left(\frac{x'_t}{\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},\frac{y'_t}{\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}},\frac{z'_t}{\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}}\right)$.

Зная, что $\overrightarrow{d\ell}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt$, $dx=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$, $dz=z'(t)dt$, получим

$$(\vec{a},\overrightarrow{d\ell})=(\vec{a},\vec{\tau^0})d\ell=(P(x,y,z)x'(t)+Q(x,y,z)y'(t)+R(x,y,z)z'(t))dt. \qquad (8.2)$$

Для вычисления КРИ II рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть кривая $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ **задана параметрическими уравнениями,** $t\in[t_1;t_2]$ Тогда вычисляем $dx=x'(t)dt,\ dy=y'(t)dt,\ dz=z'(t)dt$ и подставляем результат в (8.1). Затем интегрируем по переменной t.

Из формулы (8.2) видно, что для вычисления КРИ II надо свести его к КРИ I, вычисление которого сводится к вычислению определенного интеграла. Тогда запишем:

$$\int_L(\vec{a},\overrightarrow{d\ell})=\int_L(\vec{a},\vec{\tau^0})d\ell=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz= \qquad (8.3)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

2. Если уравнение кривой $L\subset\mathbb{R}^2$ **задано в виде** $y=y(x)$**,** $x\in[a;b]$**, то КРИ II, будет преобразован следующим образом с учетом того, что** $dy=d(y(x))$**, т.е.** $dy=y'(x)dx$:

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy=\int_a^b P(x,y(x))dx+Q(x,y(x))y'(x)dx=$$

$$=\int_a^b(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x))dx. \qquad (8.4)$$

3. Если уравнение кривой $L \subset \mathbb{R}^2$ задано в виде $x = x(y)$, $y \in [c;d]$, то КРИ II, будет преобразован следующим образом с учетом того, что $dx = d(x(y))$, т.е. $dx = x'(y)dy$:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = \int_c^d P(x(y),y)x'(y)dy + Q(x(y),y)dy =$$

$$= \int_c^d (P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y))dy. \qquad (8.5)$$

9. Связь криволинейных интегралов I и II рода

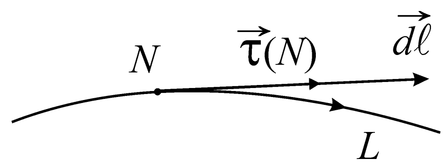


Рис. 4

Используя единичный вектор, направленный по касательной к кривой L в точке N в направлении ориентации L (Рис. 4), установим связь криволинейных интегралов I и II рода по кривой L. Вектор $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{\tau^0}(N)d\ell$, где $d\ell$ - дифференциал длины дуги, определяемый по формуле $\overrightarrow{d\ell} = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt$, если $L \in \mathbb{R}^3$ и $\overrightarrow{d\ell} = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt$ если $L \in \mathbb{R}^2$. Тогда элемент $(\vec{a}, \overrightarrow{d\ell})$ под криволинейным интегралом II рода (8.1) запишется в виде $(\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0})d\ell$, где $(\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0})$ - функция, определенная на L. Обозначим ее $f(x,y,z) = \left(\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0}\right)$, $d\ell$ - дифференциал длины дуги. Таким образом,

$$\int_L (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell}) = \int_L (\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0})d\ell = \int_L f(x,y,z)d\ell, \qquad (9.1)$$

где слева стоит интеграл II рода, а справа – равный ему интеграл I рода.

Криволинейный интеграл II рода (по координатам) обладает теми же свойствами, что и криволинейный интеграл I рода (по длине дуги). Однако, если криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой L, то криволинейный интеграл II рода зависит от ориентации L и меняет знак при изменении ориентации:

$$\int_{L_-} (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell}) = -\int_{L_+} (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell}) \tag{9.2}$$

Действительно, $\int_L (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell}) = \int_L (\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0}) d\ell = \int_L f(x,y,z) d\ell$,

$\int_{L_-} (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell}) = \int_{L_-} (\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0_-}) d\ell = -\int_L (\vec{a}, \overrightarrow{\tau^0}) d\ell = -\int_L (\vec{a}, \overrightarrow{d\ell})$, где $\overrightarrow{\tau^0_-}$ - единичный вектор касательной к кривой L_-.

10. Формула Грина

Часто встречаются случаи, когда КРИ II вычисляется по замкнутому контуру $L \subset \mathbb{R}^2$, т.е. интеграл вида $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Замкнутый контур L будем считать положительно ориентированным, если при движении по нему область D, ограниченная этим контуром, остается слева (рис.5).

Движение в противоположном направлении называется отрицательным.

Для вычисления КРИ II по замкнутому контуру (замкнутой кривой) применяют формулу Грина, которая связывает КРИ II с ДИ (двойным интегралом) по области D, ограниченной этим контуром L, где на замкнутом контуре L берется положительное направление.

Теорема. Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны со своими частными производными $\frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}$, $\frac{\partial(\mathrm{Q}(x,y))}{\partial x}$ в замкнутой области $D \cup L$, то имеет место формула Грина

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y} \right) dxdy, \tag{10.1}$$

где контур L - положительно ориентированный контур.

Доказательство:

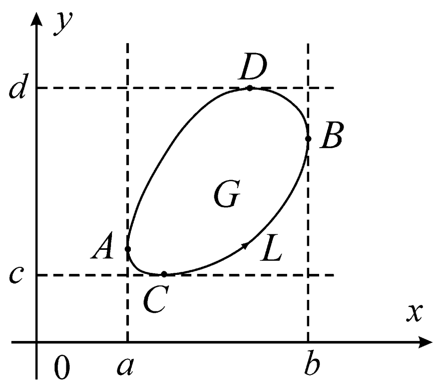


Рис. 5

На плоскости xOy рассмотрим правильную область D, ограниченную контуром L, пересекающуюся прямыми, параллельными осям координат, не более чем в двух точках (Рис. 5). Преобразуем $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y} dxdy$. Интегрируя сначала по у, потом по x, получим

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y} dy,$$

где $y = y_1(x)$ - уравнение линии ACB, $y = y_2(x)$ - уравнение линии ADB, $x \in [a;b]$. Выполним внутреннее интегрирование, помня, что функция $P(x,y)$ является первообразной для $\frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}$ и учитывая свойство определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \left(P(x,y)\right)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int\limits_a^b \left(P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx + \int\limits_b^a P(x,y_1(x))dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx$ есть интеграл по кривой ADB, т.е. $\int\limits_a^b P(x,y_2(x))dx = \int\limits_{ADB} P(x,y)dx$, а $\int\limits_b^a P(x,y_1(x))dx = \int\limits_{BCA} P(x,y)dx$.

Тогда сумма их равна КРИ по замкнутому контуру L_{-}.

$$\int_a^b P(x,y_2(x))\,\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,y_1(x))dx = \int_{ADB} P(x,y)dx + \int_{BCA} P(x,y)dx =$$
$$= \oint_{L_-} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx.$$

Следовательно,

$$\iint_{(D)} \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}dxdy = -\oint_L P(x,y)dx. \tag{10.2}$$

Аналогично и $\iint_{(D)} \frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x}dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x}dx = \int_c^d dy\big(Q(x,y)\big)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} =$

$$= \int_c^d \big(Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\big)dy = \int_c^d Q(x_2(y),y)dy + \int_d^c Q(x_1(y),y)\,dy =$$
$$= \int_{CBD} Q(x_2(y),y)dy + \int_{DAC} Q(x_1(y),y)\,dy = \oint_L Q(x,y)dy, \tag{10.3}$$

где уравнение линии *CAD* - $x = x_1(y)$, уравнение линии *CBD* - $x = x_2(y)$, $y \in [c;d]$. Вычитая почленно из равенства (7.3) равенство (7.2), получим формулу Грина.

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Замечание: *Формула Грина справедлива для всякой замкнутой области, которую можно разбить на конечное число правильных замкнутых областей.*

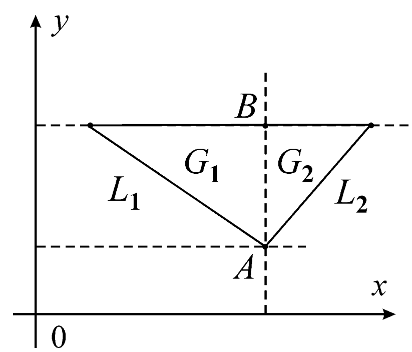


Рис. 6

Пусть область D имеет вид (Рис. 6). Разобьем ее прямой *AB* на две правильные области D_1 и D_2. Применяя формулу Грина (10.1) к каждой области, получим:

$$\iint\limits_{(D_1)}\left(\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x}-\frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,,$$

$$\iint\limits_{(D_2)}\left(\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x}-\frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{L_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Складывая эти равенства почленно, снова получим формулу (10.1) для всей области D, т.к. КРИ II, взятые по линии AB в противоположных направлениях, в сумме дают нуль.

11. Физический смысл криволинейного интеграла II рода

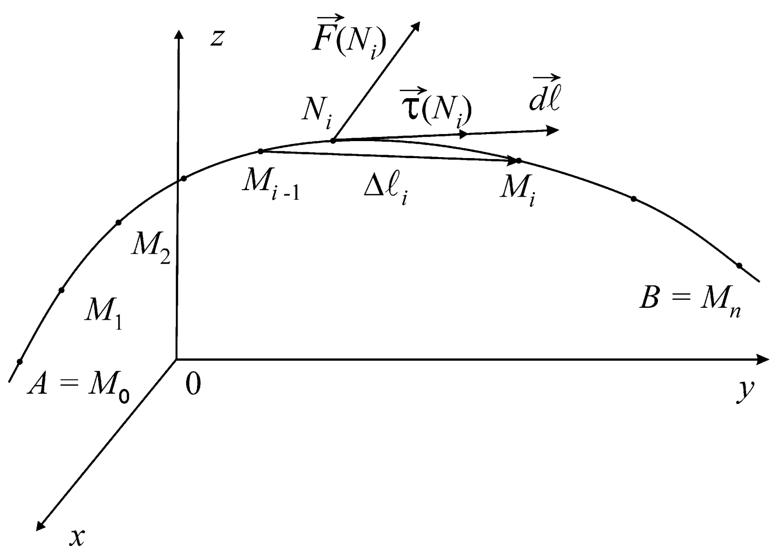


Рис. 7

Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ перемещается вдоль кривой $L\subset\mathbb{R}^3$ (Рис. 7). Найдем работу силы $\vec{F}$, затраченную на перемещение из точки A в точку B. Для этого разобьем дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг точками $A=M_0,M_1,M_2...M_n=B$. Вычислим приближенную работу на дуге $M_{i-1}M_i$, предполагая, что на ней сила постоянная, равная значению силы $\vec{F}$ в точке $N_i(x_i,y_i,z_i)\in M_{i-1}M_i$, т.е. $\vec{F}(N_i)=\vec{F}(P(N_i),Q(N_i),R(N_i))$ и путь прямолинеен, для чего заменим дугу $M_{i-1}M_i$ хордой $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\overrightarrow{\Delta\ell_i}(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$. Тогда, как, известно, работа силы $\vec{F}(N_i)$ на пути $\overrightarrow{\Delta\ell_i}$ равна скалярному произведению векторов $\vec{F}(N_i)$ и $\overrightarrow{\Delta\ell_i}$, т.е.

$$(\vec{F}(N_i),\overrightarrow{\Delta\ell_i}) = P(N_i)\cdot\Delta x_i + Q(N_i)\cdot\Delta y_i + R(N_i)\cdot\Delta z_i$$

Суммируя по всем значениям i $(i=\overline{1,n})$, получим величину

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(N_i),\overrightarrow{\Delta\ell_i}) = \sum_{i=1}^{n}(P(N_i)\cdot\Delta x_i + Q(N_i)\cdot\Delta y_i + R(N_i)\cdot\Delta z_i), \tag{11.1}$$

которую можно считать как приближенное значение работы на всем пути от A до B. Предел этой суммы при $\lambda\to 0$ примем за точное значение работы. Но, с другой стороны, предел этой суммы и есть КРИ II. Следовательно, работа силы $\vec{F}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ определяется по формуле

$$A=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz. \tag{11.2}$$

Если под действием силы $\vec{F}(P(x,y),Q(x,y))$ точка перемещается по кривой $L\in\mathbb{R}^2$, то работа силы сводится к вычислению КРИ II вида

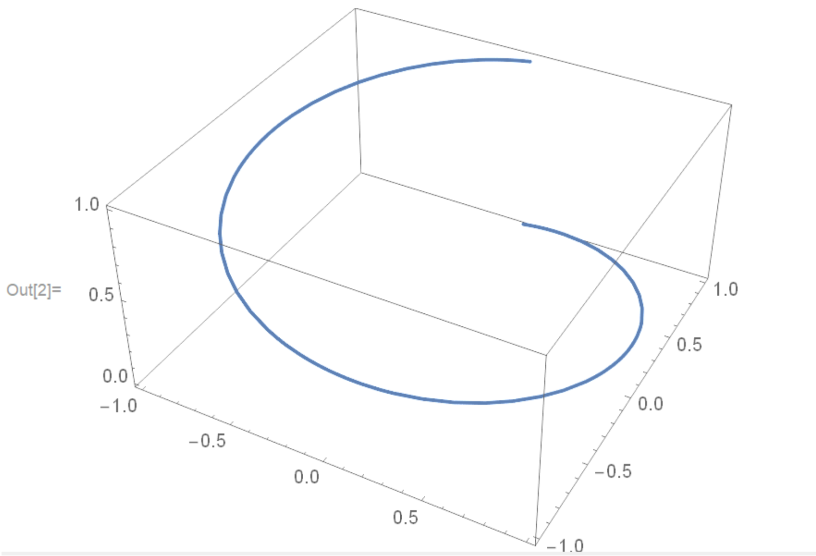
$$A=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \tag{11.3}$$

12. Примеры вычисления КРИ II

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L yzdx+xzdy+xydz$,

где L – дуга винтовой линии, т.е. $L:\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t, \quad t\in[0;2\pi]. \\ z=\dfrac{at}{2\pi} \end{cases}$

```
In[2]:= ParametricPlot3D[{Sin[t], Cos[t], t / 2 / Pi}, {t, 0, 2 Pi}]
```



Решение. Предварительно выполним промежуточные вычисления, учитывая определение дифференциала $d(f(x)) = f'(x)dx$,

$$dx = d(R\cos t); \quad dy = d(R\sin t); \quad dz = d(\frac{at}{2\pi})$$
$$dx = -R\sin t dt; \quad dy = R\cos t dt; \quad dz = \frac{a}{2\pi}dt$$

и затем подставим полученные результаты в условие $\int\limits_L yzdx + xzdy + xydz =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-R^2\sin^2 t)\frac{at}{2\pi}dt + \frac{at}{2\pi}R^2\cos^2 tdt + \frac{a}{2\pi}\cos t\sin tdt =$$

$$= \frac{a}{2\pi}R^2\int\limits_0^{2\pi}(-t\sin^2 t + t\cos^2 t + \cos t\sin t)dt = \frac{a}{2\pi}R^2\int\limits_0^{2\pi}(t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t)dt =$$

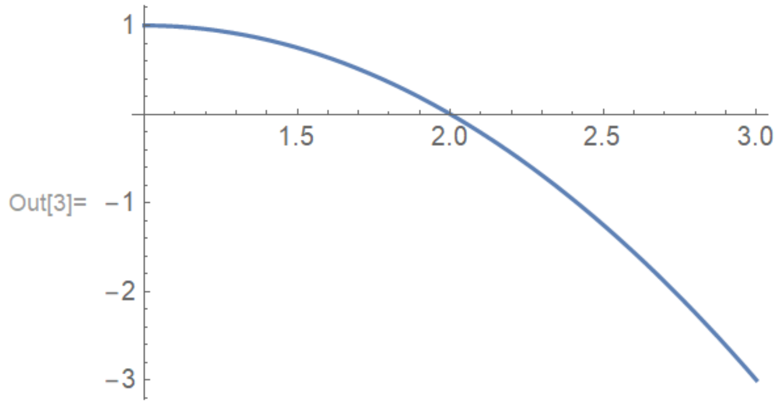
Разобьем полученный интеграл на сумму двух интегралов:

$$\frac{a}{2\pi}R^2\int\limits_0^{2\pi} t\cos 2tdt + \frac{1}{2}\frac{a}{2\pi}R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin 2tdt.$$

Первый из интегралов решаем методом интегрирования по частям, а второй с помощью замены переменной или поднесения под знак дифференциала. В итоге получаем $\frac{a}{2\pi}R^2(\frac{t}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2tdt) + \frac{1}{2}\frac{a}{2\pi}R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin 2tdt = 0$.

Пример 6. Вычислить работу силы $\vec{F}(y+x^2, 2x-y)$ вдоль дуги параболы $y=2x-x^2$ от точки $A(1,1)$ до $B(3,-3)$.

```
In[3]:= Plot[2 x - x^2, {x, 1, 3}]
```



Решение. Силу можно записать в таком виде $\vec{F}=(y+x^2)\vec{i}+(2x-y)\vec{j}$. Как известно, работу силы можно вычислить по формуле

$$A=\int\limits_L(\vec{F},\vec{d\ell})=\int\limits_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

Для плоского случая $A=\int\limits_L(\vec{F},\vec{d\ell})=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Тогда интеграл в координатной форме имеет вид $A=\int\limits_L(y+x^2)dx+(2x-y)dy$.

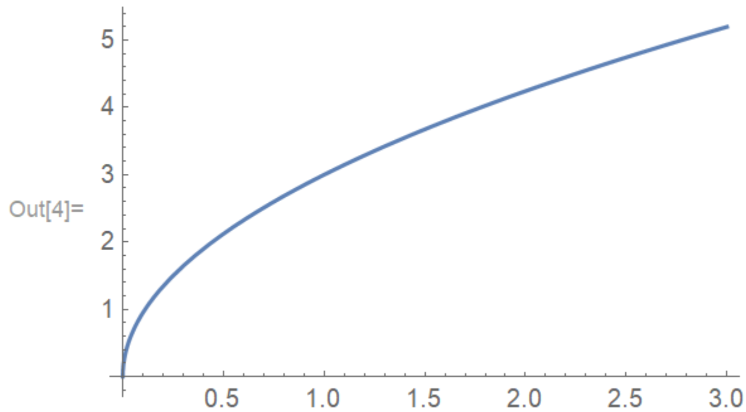
Учитывая, что уравнение линии задано в явном виде $y=y(x)$, т.е. $y=2x-x^2$, найдем $dy=d(2x-x^2)$, $dy=(2-2x)dx$. Для вычисления работы подставим уравнение линии и $dy=(2-2x)dx$ в $A=\int\limits_L(y+x^2)dx+(2x-y)dy$.

Получаем следующее выражение $A=\int\limits_1^3(2x-x^2+x^2)dx+(2x-(2x-x^2)(2-2x)dy=$

$$=\int\limits_1^3(2x+2x^2-2x^3)dx=-\frac{44}{3}$$

Пример 7. Вычислить работу силы $\bar{F}(y^2, xy-y^2)$ вдоль дуги параболы $y^2=9x$ от точки $O(0,0)$ до $A(1,3)$.

```
In[4]:= Plot[3 Sqrt[x], {x, 0, 3}]
```

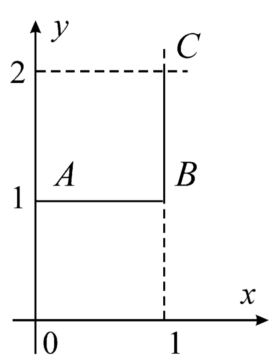


Решение. Силу записываем в таком виде $\overline{F} = y^2\vec{i} + (xy - y^2)\vec{j}$. Далее по формуле:

$$A = \int_L (\vec{F}, \overrightarrow{d\ell}) = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

получаем $A = \int_L y^2 dx + (xy - y^2)dy$. Учитывая, что уравнение линии задано в явном виде $x = x(y)$, $y \in [0;3]$, находим $x = \dfrac{y^2}{9}$ и $dx = \dfrac{2y}{9}dy$, а затем подставляем его в интеграл.

$$A = \int_0^3 y^2 \cdot \frac{2}{9} y dy + (\frac{y^2}{9} \cdot y - y^2)dy = \int_0^3 (\frac{1}{3}y^3 - y^2)dy = -\frac{9}{4}$$



Пример 8. Найти работу силы $\vec{F}(xy, x+y)$ при перемещении материальной точки по ломаной, проходящей через точки $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$

Решение. Запишем формулу для вычисления работы по ломаной ABC $A = \int\limits_{ABC} xy\,dx + (x+y)\,dy =$

$$\int\limits_{AB} xydx + (x+y)dy = \int\limits_{BC} xydx + (x+y)dy.$$

Прежде чем приступить к непосредственному вычислению работы необходимо записать уравнение линии ABC, которая является ломаной т.е. состоит из двух частей $ABC: AB \cup BC$. Запишем уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки, воспользовавшись формулой $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Таким образом получим уравнение прямых $AB: y=1,\ dy=d(1)=(1)'dx=0dx=0,$. $BC: x=1,$ $dx=d(1)=0dx=0$. Подставим промежуточные вычисления в интеграл:

$$A=\int_{AB} xdx+\int_{BC}(1+y)dy=\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x+\int_1^2(1+y)dy=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.(y+\frac{y^2}{2})\right|_1^2=3.$$

Пример 9. Используя формулу Грина, вычислить КРИ II.
$\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, где L - окружность $x^2+y^2=R^2$.

Решение. Преобразуем этот интеграл по формуле Грина. Так как $P(x,y)=(1-x^2)y$, $Q(x,y)=x(1+y^2)$ и $\frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(1-x^2)y)}{\partial y}=(1-x^2)$, $\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x}=\frac{\partial(x(1+y^2))}{\partial x}=(1+y^2)$, то по формуле (10.1) запишем

$$\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy=\iint\limits_D(1+y^2-1+x^2)dxdy=\iint\limits_D(y^2+x^2)dxdy.$$

Область D ограничена окружностью L: $x^2+y^2=R^2$. Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ I=r\end{cases}$, при этом $\varphi\in\left[0;2\pi\right]$.

Двойной интеграл преобразуем следующим образом:

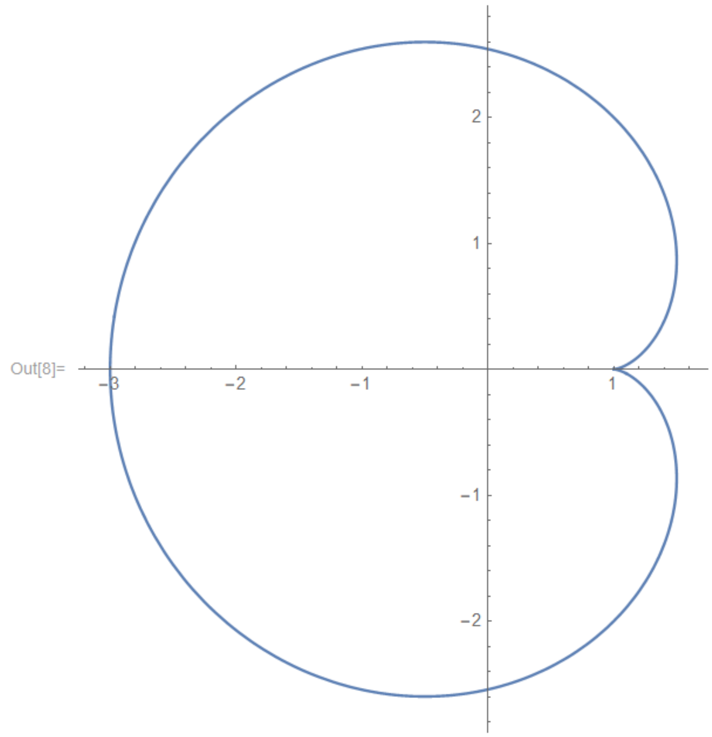
$$\iint\limits_D(y^2+x^2)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R\right)=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^4}{4}d\varphi=\frac{R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{R^4}{4}(\varphi|_0^{2\pi})=\frac{2\pi R^4}{4}=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Замечание. С помощью формулы Грина можно получить следующие формулы для вычисления площади плоской области D, ограниченной замкнутым контуром, L: $S_D=\oint\limits_L xdy$ или .$S_D=\frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy-y\,dx$.

Пример 10. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислите площадь, ограниченную кардиоидой: $L\begin{cases} x = R(2\cos t - \cos 2t) \\ y = R(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

```
In[8]:= ParametricPlot[{2 Cos[t] - Cos[2 t], 2 Sin[t] - Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```



Решение. Для вычисления площади можно воспользоваться формулой $S_D = \oint\limits_L x dy$. Вычислим $dx = R(2\sin t - 2\sin 2t)dt$, $dy = R(2\cos t - 2\cos 2t)dt$.

Подставим в формулу и получим такой интеграл для вычисления площади

$$S_D = \oint\limits_L x dy = \int\limits_0^{2\pi} R(2\cos t - \cos 2t)R(2\cos t - 2\cos 2t)dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 6\cos^3 t + 6\sin^2 t\cos t + 2(\cos^2 \mathrm{t} - \sin^2 t)dt =$$

$$= R^2 \left[4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt - 6\int\limits_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)d\sin t + 6\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t d\sin t + 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 4t)dt \right] =$$

$$= R^2 \left[2 \cdot 2\pi + 2\pi \right] = 6\pi R^2$$

13. Независимость КРИ II от пути интегрирования

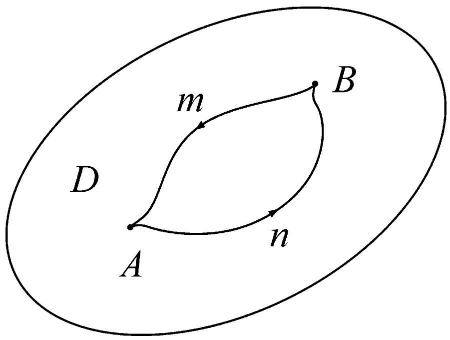


Рис. 8

В области D, где определена вектор-функция $\vec{a}(N)$, возьмем две произвольные точки A и B. Соединим их различными линиями, например, $AnB \in D$ и $BmA \in D$ (Рис. 8). Вычислим КРИ II по этим линиям, вообще говоря, получаем различные значения, т.е. значение интеграла зависит от пути интегрирования. Если же значение интеграла равны между собой для любых линий, соединяющих точки A и B, то говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Значение такого интеграла определяется заданием начальной точки A и конечной точки B. Рассмотрим условия, при которых КРИ II не зависит от пути интегрирования.

Теорема. Для того, чтобы интеграл

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{13.1}$$

в некоторой области D не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы вычисленный по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, он был равен нулю.

Доказательство. **Необходимость**. Нужно доказать, что $\int\limits_{AnB} \ldots = \int\limits_{AmB} \ldots$, где AnB и AmB - произвольные кривые, соединяющие точки A и B в области D (Рис. 8). Вычислим интеграл по замкнутому контуру $AnBmA \in D$. По свойству интегралов запишем

$$\oint\limits_{AnBmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{BmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Так как по условию $\oint\limits_{AnBmA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, то отсюда следует

$\int\limits_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, т.е. при выполнении этого условия КРИ II не зависит от пути интегрирования.

Достаточность. Легко доказывается повторением этих рассуждений в обратном порядке.

Теорема. Для того, чтобы КРИ II $\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial(\mathrm{Q}(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}. \tag{13.2}$$

Доказательство. **Необходимость**. Пусть КРИ II (13.1) не зависит от пути интегрирования. Тогда по теореме 1 интеграл по любому замкнутому контуру в области D равен нулю. Покажем, что в этом случае будет выполняться условие (13.2). Используем метод от противного. Допустим, что условие (13.2) не выполняется в некоторой точке $(x_0, y_0) \in D$, т.е. $\dfrac{\partial(Q(x_0,y_0))}{\partial x} \neq \dfrac{\partial(P(x_0,y_0))}{\partial y}$.

Пусть $\dfrac{\partial(Q(x_0,y_0))}{\partial x} > \dfrac{\partial(P(x_0,y_0))}{\partial y}$. Введем функцию

$F(x,y) = \dfrac{\partial(Q(x,y))}{\partial x} - \dfrac{\partial(P(x,y))}{\partial y}$, которая непрерывна в точке (x_0, y_0), т.к. частные производные непрерывны во всей области D, причем $F(x_0,y_0) > 0$. Следовательно, существует такая окрестность $D_\delta(x_0,y_0)$ точки (x_0,y_0), для всех точек которой, включая и контур L_δ, функция $F(x,y) > 0$ (Рис. 9). Тогда по формуле Грина для области D_δ имеем

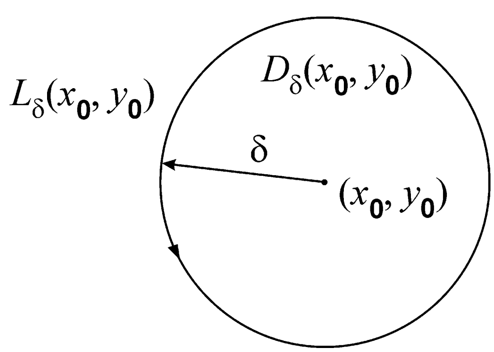


Рис. 9

$\oint\limits_{L_\delta} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D_\delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{D_\delta} F(x,y)dxdy$, где L_δ - контур, ограничивающий область D_δ. Так как $F(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in D_\delta \bigcup L_\delta$, то $\iint\limits_{D_\delta} F(x,y)dxdy > 0$, поэтому $\oint\limits_{L_\delta} P(x,y)dx + Q(x,y)dy > 0$. Это противоречит условию независимости КРИ II в области D от пути интегрирования. Следовательно, наше предположение неверно и условие (13.2) выполняется в каждой точке области D.

Достаточность. Пусть в области D выполняется условие (13.2). Рассмотрим в этой области замкнутый контур L, ограничивающий область D, и воспользуемся формулой Грина

$$\oint\limits_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D_1)}\left(\frac{\partial(Q(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial(P(x,y))}{\partial y}\right)dxdy.$$

В двойном интеграле подынтегральное выражение равно нулю в силу (13.2). Следовательно, $\oint\limits_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Отсюда на основании теоремы 1 заключаем, что КРИ II не зависит от пути интегрирования.

Замечание:

1. Если КРИ II не зависит от пути интегрирования, а определяется только заданием начальной точки *A* и конечной точки *B*, то такой интеграл обозначают $\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

2. Если область D не является односвязной, то выполнение в ней указанных условий не влечет за собой равенство нулю КРИ II по любому замкнутому контуру, лежащему в области D.

Пример 11. Вычислить $\int\limits_L (4xy + 5y^3)dx + (2x^2 + 15xy^2)dy$ от точки $A(0,0)$ до $B(1,1)$ по линиям:

1. L – отрезок прямой $y = x$;

2. L – дуга параболы $y^2 = x$;

3. L – дуга кубической параболы $y = x^3$.

Решение.

1. Уравнение прямой $y=x$ задано в виде $y=f(x)$, тогда учитывая, что $dy=d(f(x))$, $dy=f'(x)dx$, получим $dy=dx$. Подставим $y=x$ и $dy=dx$ в условие, $x\in[0;1]$

$$\int\limits_L (4xy+5y^3)dx+(2x^2+15xy^2)dy = \int_0^1 (4x^2+5x^3)dx+(2x^2+15x^3)dx =$$

$$=\int_0^1 (6x^2+20x^3)dx=7.$$

2. Уравнение параболы $y^2=x$ задано в виде $x=f(y)$, тогда $dx=d(f(y))$, $dx=f'(y)dy$. Тогда $dx=d(y^2)$, $dx=(y^2)'dy$, $dx=2ydy$.

Подставим $x=y^2$, $dx=2ydy$, $y\in[0;1]$ в условие

$$\int\limits_L (4xy+5y^3)dx+(2x^2+15xy^2)dy = \int_0^1 (4y^3+5y^3)2ydy+(2y^4+15y^4)dy =$$

$$=\int_0^1 (4y^3+5y^3)2ydy+(2y^4+15y^4)dy = 35\int_0^1 y^4\,\mathrm{dy} = 35\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1 = 7.$$

3. Уравнение кубической параболы $y=x^3$, тогда $dy=d(x^3)$, $dy=(x^3)'dx$, $dy=3x^2dx$, $x\in[0;1]$. Сведем данный интеграл к определенному по переменной х. $\int\limits_L (4xy+5y^3)dx+(2x^2+15xy^2)dy = \int_0^1 (4x\cdot x^3+5x^9)dx+(2x^2+15x\cdot x^6)3x^2dx =$

$$=\int_0^1 (10x^4+50x^9)dx = \left.(2x^5+5x^{10})\right|_0^1 = 7.$$

Во всех рассмотренных случаях получено одно и то же значение КРИ II. Можно заметить $P(x,y)=(4xy+5y^3)$, $Q(x,y)=(2x^2+15xy^2)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(4xy+5y^3)}{\partial y}=4x+15y^2 \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(2x^2+15xy^2)}{\partial x}=4x+15y^2$$

т.е. выполнено условие (13.2) и КРИ II не зависит от пути интегрирования.

14. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Если для КРИ II $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ выполняется условие (13.2), то подынтегральное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $U = U(x,y)$ (потенциальной функции), т.е. $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, причем $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$.

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_A^B dU = U(B) - U(A). \qquad (14.1)$$

Итак, в этом случае величина КРИ II зависит от значений функции $U(x,y)$ в начальной и конечной точках пути интегрирования.

Функцию $U(x,y)$ найдем, вычисляя КРИ по ломаной $ACB \in D$ (Рис. 10), где $A(x_0, y_0)$ - произвольная фиксированная точка, $B(x,y)$ - переменная точка, $C(x, y_0)$. Тогда $\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy =$ $= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Так как вдоль AC имеем $y = y_0$, $dy = 0$, а вдоль *CB*, $x = const$, то $dx = 0$ и

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C, \qquad (14.2)$$

где первый интеграл справа вычисляется при постоянном $y = y_0$, а второй – при постоянном, хотя и произвольном x.

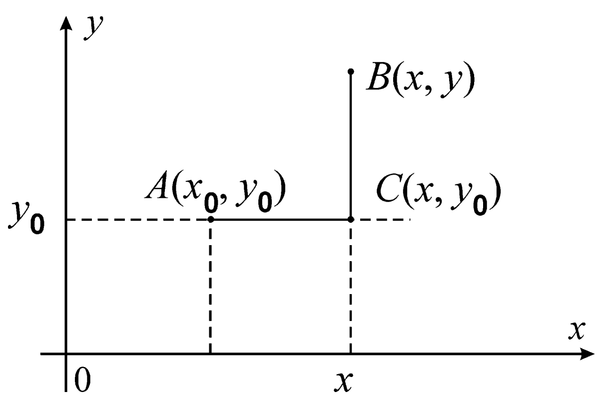


Рис. 10

Пример 12. Найти функцию $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу $dU(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$.

Решение. $P(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2)$, $Q(x,y) = (x^2 - 2xy - y^2)$.

Найдем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 2xy - y^2)}{\partial y} = 2x - 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - 2xy - y^2)}{\partial x} = 2x - 2y$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то выражение $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$ является полным дифференциалом. Найдем $U(x, y)$ по (14.2):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} (x^2 + 2xy - y^2)dx + \int_{y_0}^{y} (x^2 - 2xy - y^2)dy =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y_0 - y_0^2 x\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + \left(x^2 y - y^2 x - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} = \frac{x^3}{3} + x^2 y_0 - y_0^2 x - \frac{x_0^3}{3} - x_0^2 y_0 + y_0^2 x_0 +$$

$$+ x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} - x^2 y_0 + xy_0^2 - \frac{y_0^3}{3} = \frac{x^3}{3} + x^2 y - y^2 x - \frac{y^3}{3} + C,$$

Где $C = \frac{x_0^3}{3} - x_0^2 y_0 + y_0^2 x_0 + \frac{y_0^3}{3}$.

Итак, искомая функция $U(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - y^2 x - \frac{y^3}{3} + C$.

В пространственном случае для определения потенциальной функции $U(x, y, z)$ необходимо убедиться в выполнении условия $\overrightarrow{rot\ a} = 0$, где $\vec{a} = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Задачи по теме криволинейный интеграл первого рода

Вычислить криволинейные интегралы первого рода $\int\limits_L f(x,y)d\ell$**:**

1. L - контур треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $f(x,y)=x+y$.

2. L -- часть астроиды $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,$ расположенной в первой координатной четверти, $f(x,y)=3x-2\sqrt[3]{a^2y}$, $(a>0)$.

Найти длину дуги кривой L**:**

3. L - кривая $x=3t,\ \ y=3t^2,\ \ z=2t^3$ от точки $(0,0,0)$ до точки $(3,3,2)$.

4. L - часть кривой $y=\ln x$ от точки $(1,0)$ до точки $(e,1)$.

Вычислить массу дуги кривой:

5. L - дуга параболы $x=4y^2$ с плотностью $\rho(x,y)=\dfrac{y}{x}$ от точки $A(4,1)$ до точки $B(16,2)$.

6. L - дуга окружности $2x=x^2+y^2$ с плотностью $\rho(x,y)=x-y$.

Найти координаты центра масс:

7. Четверти однородной окружности $x^2+y^2=a^2$, лежащей в первом квадранте.

8. Однородной дуги одной арки циклоиды $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$.

Вычислить момент инерции:

9. Относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками $A(2,0)$ и $B(0,1)$, если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

10. Относительно оси Oz однородной дуги первого витка винтовой линии $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$.

Вычислить статические моменты:

11. Относительно координатных осей дуги астроиды $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,$ расположенной в первом квадранте.

12. Относительно координатных осей однородной дуги цепной линии
$y=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})}{2}$, $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

2. Задачи по теме криволинейный интеграл второго рода

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

1. $\int\limits_{L}(12xy+4z^{2})dx+(2x^{2}+15zy^{2})dy+(8xz-5y^{3})dz$ по прямой от точки $A(1,0,2)$ до $B(3,1,4)$.

2. $\int\limits_{L}\left(x^{2}-2xy\right)dx+\left(2xy+y^{2}\right)dy$, где AB - дуга параболы $y=x^{2}$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

Вычислить применяя формулу Грина:

3. $\oint\limits_{L}2(x^{2}+y^{2})dx+(x+y)^{2}dy$, где C - пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$. Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

4. $\oint\limits_{L}-x^{2}ydx+xy^{2}dy$, где C - окружность $x^{2}+y^{2}=R^{2}$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Вычислить площадь фигур, ограниченных замкнутыми линиями:

5. Окружностью $x=R\cos t,\ y=R\sin t$.

6. Петлей линии $(x+y)^{4}=x^{2}y$.

Вычислить работу силы:

7. В каждой точки плоскости на материальную точку действует сила $\vec{F}$, проекции которой на оси координат равны $P(x,y)=xy, Q(x,y)=x+y$.
Вычислить работу силы $\vec{F}$ при перемещении точки из начала координат в точку $A(1;1)$: 1) по прямой $y=x$; 2) по параболе $y=x^{2}$; 3) по двухзвенной ломанной, стороны которой параллельны осям координат (два случая).

8. Проекции силы на оси координат задаются формулами $F_x = 2xy, F_y = x^2$. Показать, что работа силы не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начального и конечного ее положения и не зависит от формы пути. Вычислить величину работы при перемещении из точки (1, 0) в точку (0, 3).

Вычислить криволинейные интегралы от выражений, являющихся полными дифференциалами:

9. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$.

10. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,4)} xdx + ydy$.

11. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dy+dx)$.

Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов, взятые вдоль пространственных кривых:

12. $\int\limits_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} xdx + ydy - zdzy$.

13. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yzdx + xzdy + xydz$.

14. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Контрольные вопросы

1. Написать векторное уравнение кривой.
2. Какая кривая называется гладкой?
3. Какая кривая называется кусочно-гладкой?
4. Какая кривая называется ориентированной (направленной)?
5. Какая кривая называется замкнутой?
6. Записать интегральную сумму, соответствующую криволинейному интегралу первого рода.
7. Дать определение КРИ I.
8. Как обозначается криволинейный интеграл?
9. Зависит ли КРИ-I от направления интегрирования?
10. Как обозначается криволинейный интеграл по замкнутому контуру?
11. Записать формулу для вычисления массы дуги линии.
12. Записать формулу для вычисления длины дуги L.
13. Записать формулу для вычисления координат центра масс дуги $L \subset \mathbb{R}^2$.
14. Записать формулу для вычисления координат центра масс дуги $L \subset \mathbb{R}^3$.
15. Записать формулу для вычисления КРИ I, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением вида $y = y(x)$, $a \le x \le b$.
16. Записать формулу для вычисления КРИ I, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением вида $x = x(y)$, $c \le y \le d$.
17. Записать формулу для вычисления КРИ I, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$.
18. Записать формулу для вычисления КРИ I, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, , $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$.
19. Записать формулу для вычисления КРИ I, если кривая $L \subset \mathbb{R}^3$ задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1; t_2]$.
20. Как задается вектор-функция.
21. Дать определение КРИ II.
22. Записать КРИ II в векторной форме.
23. Записать КРИ II в координатной форме.
24. Записать связь криволинейных интегралов I и II рода по кривой L.
25. Зависит ли КРИ-II от направления кривой?
26. Записать формулу для вычисления КРИ II, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением вида $y = y(x)$, $a \le x \le b$.

27. Записать формулу для вычисления КРИ II, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением вида $x = x(y)$, $c \le y \le d$.
28. Записать формулу для вычисления КРИ II, если кривая $L \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$.
29. Записать формулу для вычисления КРИ II, если кривая $L \subset \mathbb{R}^3$ задана параметрическими уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1; t_2]$.
30. Как найти единичный вектор касательной $\overrightarrow{\tau^0}$?
31. Как найти касательный вектор к кривой?
32. Какой контур L называется положительно (отрицательно) ориентированным?
33. Что такое полный дифференциал?
34. Когда применяют формулу Грина?
35. Записать формулу Грина?
36. Вычисление площадей с помощью формулы Грина.
37. Записать условие независимости КРИ II от пути интегрирования.
38. Как можно вычислить потенциал?
39. Как восстановить функцию по ее частным производным (дифференциалу) с помощью криволинейного интеграла второго рода?
40. Записать формулу вычисления работы с помощью потенциала.

Контрольные задания

Вариант 1.

1. Вычислить $\int\limits_L xyzdl$, если L - отрезок прямой между точками $A(1,0,1)$ и $B(2,2,3)$, указать правильный ответ.

a) $12\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}$; c) – 12; **d)** 12.

2. Указать выражение в полных дифференциалах.

a) $4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$; b) $(3y-x)dx+(y-3x)dy$;

c) $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x+x^2\sin y)dy$.

3. Найдя потенциальную функцию, вычислить работу силы $\overline{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ вдоль прямой от точки $A(0,0)$ до $B(2,1)$.

a) 8; b) -4; **c) 4;** d) 2.

4. Вычислить $\int\limits_L (xy-x)dx+\frac{x^2}{2}dy$, где L_{AB} - дуга параболы $y=4x^2$ от $O(0,0)$ до $B(1,4)$.

a) $\frac{3}{2}$**;** b) – 4; c) 0; d) 2.

5. Записать условие независимости КРИ II от пути интегрирования.

Вариант 2.

1. Вычислить $\int\limits_L x^2 y dl$, если L - часть окружности $x^2 + y^2 = 9$, лежащая в первом квадранте.

a) $\frac{27}{2}$; b) – 9; **c) 27;** d) 18.

2. Вычислить работу силы $\overline{F} = y^2\vec{i} + (x+y)^2\vec{j}$ вдоль контура треугольника $A(3,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$

a) $\frac{27}{2}$; b) – 9; c) 27; **d) 18.**

3. Указать полный дифференциал функции $U = x^4y^3 - xy^2 + C$.

a) $dU = (4x^3y^2 - xy^2)dx - (x^2y - 2x^4y)dy$;

b) $dU = (4x^3y^3 - y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy$;

c) $dU = (8xy + x^3)dx + (4x^2 - y^3)dy$.

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки по кривой, образованной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$.

a) 1; b) – 2; **c) 0;** d) 18.

5. Записать формулу Грина.

Вариант 3.

1. Вычислить массу дуги кривой $y = \ln x$ с плотностью $\rho(x, y) = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$.

a) $\frac{27}{2}$; b) – 9; c) 27; **d)** $\frac{19}{3}$.

2. Показать, что выражение $dU = (\frac{y}{x} + \ln y + 2x)dx + (\ln x + \frac{x}{y} + 1)dy$ является полным дифференциалом функции $U(x, y)$. Найти функцию $U(x, y)$.

a) $U = \frac{y}{x} + x\ln y + 2x^2 + y + C$;

b) $U = \frac{x}{y} + x\ln y + x^2 + y + C$;

c) $U = y\ln x + x\ln y + x^2 + y + C$**.**

3**.** Вычислить $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, где L_{AB} - отрезок прямой, соединяющей $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.

a) 8; **b) 13;** c) 4; d) 2.

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = (x^2 + y^2 + 1)\vec{i} + 2xy)\vec{j}$ при перемещении материальной точки по кривой, образованной параболой $y = x^3$ и прямыми $y = 1$ и $x = 0$.

a) 1; b) – 2; **c) 0;** d) 18.

5. Записать формулу вычисления площади с помощью КРИ II.

Литература

Основная литература

1. Рябушко, А.П. Высшая математика: теория и задачи: учебное пособие для студентов учреждения высшего образования по техническим специальностям в 5 ч / А.П. Рябушко [и др.]; под общей ред А.П. Рябушко. Минск: Выш. школа, Ч.4: Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной. / А.П.Рябушко, Т.А. Жур -2017. -254с.
2. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: учебное пособие для инженерно-технических специальностей втузов: в 2-х ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск: Вышэйшая школа, 1993 – 301 с. –2 ч.

Дополнительная литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х ч. / П.Е. Данко [и др.]7-е изд., испр. – Москва: Оникс, Мир и Образование, 2012 – 368 с, ч. 1. 2012 – 448с., ч. 2.
2. Ерошевская, В.И. Ряды. Методическое пособие по дисциплине «Высшая математика» для студентов строительных специальностей / / В.И. Ерошевская, Е.Л. Ерошевская. – Минск: БНТУ, 2007. –156 с.
3. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский.– 3-е изд. исправ. и доп. – Москва: Наука, 1988. – 222с.
4. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник для инженерно-технических специальностей вузов /Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 4-е изд. перераб. и доп. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.– 509с.
5. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Бугров, С.М. Никольский – 4-е изд., улучш.– Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.– 511с.
6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: [учебное пособие для втузов]: в 2 т. /Н.С. Пискунов. – Изд. стер. – Москва: Интеграл – Пресс, 2002. – 544 с. – 2т.