

водить активную защиту абразионных и эрозионных берегов. Наличие количественных данных по существующим водохранилищам позволит оценить деформации склонов на проектируемых объектах и разработать мероприятия по берегозащите.

### Л и т е р а т у р а

1. Широков В.М., Попух П.С. Формирование берегов малых водохранилищ Белоруссии // Морфогенез на территории Белоруссии. — Минск, 1983. — С. 71—81.
2. Левкевич Е.М. Некоторые результаты наблюдений за переработкой берегов малого водохранилища // Тр. совещ. по динамике берегов морей и водохранилищ. — Одесса, 1959. — С. 19—21.
3. Левкевич Е.М. К вопросу переработки берегов малых водохранилищ // Изв. высш. уч. завед. Сер. Энергетика. — Минск, 1964. — № 12. — С. 99—104.
4. Левкевич В.Е. Закономерности развития абразии берегов малых водохранилищ // Вопросы эксплуатации осушительно-увлажнительных систем. — Минск, 1983. — С. 110.
5. Финаров Д.П. Динамика берегов и котловин водохранилищ гидроэлектростанций СССР. — Л., 1974. — 241 с.
6. Попух П.С. Типизация берегов малых водохранилищ Белоруссии // Тез. докл. Всесоюз. научн.-техн. совещ. по динамике берегов водохранилищ, их охране и рациональному использованию. — Черкассы, 1979. — Кн. 2. — С. 49—52.
7. Левкевич В.Е. Рекомендации по прогнозированию переработки абразионных берегов малых равнинных водохранилищ, сложенных несвязными грунтами. — Минск, 1984. — 40 с.
8. Максимчук В.Л. Рациональное использование и охрана берегов водохранилищ. — Киев, 1981. — 112 с.

УДК 624.131.52

С.В. СОБОЛЕВСКИЙ,  
В.В. ПАВЛОВЕЦ (БПИ)

### К ВОПРОСУ О НАЧАЛЬНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ АНИЗОТРОПНОГО ВОДОНАСЫЩЕННОГО ОСНОВАНИЯ

В общепринятой постановке задачи о начальном напряженном состоянии водонасыщенного основания используется допущение о передаче нагрузки в начальный момент загрузки полностью на воду [1,2]. В известной степени данное допущение удовлетворяет постановке задачи о начальном напряженном состоянии изотропного водонасыщенного основания. Если же рассматривать с этим допущением анизотропное водонасыщенное основание, то исследователь сталкивается с противоречиями как в теоретическом, так и в экспериментальном плане, в частности с невозможностью получить аналитическое решение для касательных напряжений, удовлетворяющих условию на поверхности основания  $\tau_{xy/y=0} = 0$  при  $\sigma_{x/y=0} = \sigma_{y/y=0} = 0$ . С другой стороны, экспериментально подтверждено, что поверхностная нагрузка воспринимается и грунтовой водой и скелетом основания. Учет этого фактора позволяет более точно судить о напряженном состоянии основания и допуске нагружения.

В данной статье рассмотрим начальное напряженное состояние ортотропного водонасыщенного основания при восприятии нагрузки водой и скелетом

этого основания (рис. 1). Для решения поставленной задачи будем пользоваться:

– системой уравнений равновесия скелета водонасыщенного основания

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial H}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \gamma \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\gamma$  – объемная масса воды;  $H$  – напорная фильтрационная функция;

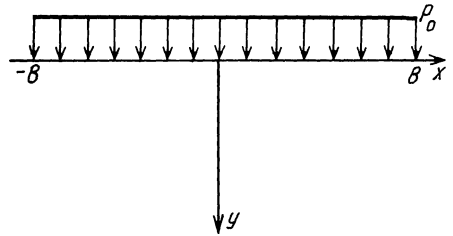


Рис. 1. Схема загрузки ортотропного водонасыщенного основания

– уравнениями обобщенного закона Гука для ортотропного основания в случае плоской деформации [3]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_x} [ (1 - \mu_{xz}^2) \sigma_x - (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}) \sigma_y ], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E_y} [ (1 - \mu_{yz}^2) \sigma_y - (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz}) \sigma_x ], \epsilon_z = 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_x, E_y$  – модули деформаций по главным направлениям  $x, y$ ;  $G$  – модуль сдвига, характеризующий изменение углов между главными направлениями  $x, y$ ;  $\mu_{xy}, \mu_{yx}, \mu_{xz}, \mu_{zx}, \mu_{zy}, \mu_{yz}$  – коэффициенты Пуассона;

– уравнением неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (3)$$

– уравнением напорной фильтрационной функции [4]

$$n^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $n^2 = K_x/K_y$ ;  $K_x, K_y$  — коэффициенты фильтрации соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Восприятие нагрузки скелетом основания и грунтовой водой реализуем при решении задачи условиями на границе  $y = 0$ :

$$\sigma_y(x, 0) = \alpha P(x), \tau_{xy}(x, 0) = 0, H(x, 0) = \beta \frac{P(x)}{\gamma}. \quad (5)$$

Причем коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  можно определить экспериментально, используя датчик порового давления с соблюдением условия  $\alpha + \beta = 1$ .

При удалении от поверхности водонасыщенного основания происходит рассеяние начальных напряжений и фильтрационного напора:

$$\sigma_{y/y=\infty} = \sigma_{x/y=\infty} = \tau_{xy/y=\infty} = H/y=\infty = 0. \quad (6)$$

Подставив значение деформаций (2) в уравнение (3), получим уравнение совместности деформаций в напряжениях:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{E_x} [(1 - \mu_{xz}^2) \sigma_x - (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}) \sigma_y] \right\} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{E_y} [(1 - \mu_{yz}^2) \sigma_y - (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz}) \sigma_x] \right\} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{G} \tau_{xy} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений равновесия (1) выражается через функцию Эри  $\varphi(x, y)$  и  $H(x, y)$  в виде

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \gamma H, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \gamma H, \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8)$$

Используя значения напряжений (8) в уравнении совместности (7), найдем уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений  $\varphi(x, y)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_y} (1 - \mu_{yz}^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left[ \frac{1}{G} - \frac{1}{E_x} (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{E_y} (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz}) \right] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} (1 - \mu_{xz}^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \\ & = \gamma \frac{1}{E_y} [(1 - \mu_{yz}^2) - (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz})] \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \\ & + \gamma \frac{1}{E_x} [(1 - \mu_{xz}^2) - (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy})] \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Применим к решению задачи метод комплексного интегрального преобразования Фурье:

$$\bar{f}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{isx} dx.$$

Применение интегрального преобразования к дифференциальному уравнению в частных производных временно исключает одну из независимых переменных. Вследствие этого интегрирование заданного дифференциального уравнения в частных производных сводится к интегрированию уравнения в частных производных, содержащих независимых переменных на единицу меньше, чем заданное уравнение [5].

Решаем совместно уравнение неразрывности (9) с уравнением напорной фильтрационной функции (4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_x} (1 - \mu_{xz}^2) \frac{d^4 \bar{\varphi}(s, y)}{dy^4} - \left[ \frac{1}{G} - \frac{1}{E_x} (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{E_y} (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz}) \right] s^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}(s, y)}{dy^2} + \frac{1}{E_y} (1 - \\ & - \mu_{yz}^2) s^4 \bar{\varphi}(s, y) = \gamma \left[ \frac{1}{E_x} [(1 - \mu_{xz}^2) - (\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy})] \times \right. \\ & \times \frac{d^2 \bar{H}(s, y)}{dy^2} - \frac{1}{E_y} [(1 - \mu_{yz}^2) - (\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz})] s^2 \bar{H}(s, y) \left. \right], \\ & - n^2 s^2 \bar{H}(s, y) + \frac{d^2 \bar{H}(s, y)}{dy^2} = 0. \end{aligned}$$

В ходе данного решения используются: метод вариации произвольных постоянных Лагранжа, обратные преобразования Фурье, обеспечивающие восстановление "утраченной" переменной. Ввиду громоздкости преобразований приведем формулы для определения напряжений и напорной функции  $H(x, y)$ , возникающих в ортотропном основании от действия внешней равномерно распределенной полосовой нагрузки  $P(x) = P_0$  на участке от  $-b$  до  $b$ , в конечном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{\alpha P_0}{\pi(m_2 - m_1)} \left\{ m_2 \left( \operatorname{arctg} \frac{2m_1 by}{m_1^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi \right) - \right. \\ & - m_1 \left( \operatorname{arctg} \frac{2m_2 by}{m_2^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi \right) \left. \right\} - \frac{\beta P_0}{\pi(m_2 - m_1)} \left\{ [\tau n - m_2(\tau + 1)] \times \right. \\ & \times \left( \operatorname{arctg} \frac{2m_1 by}{m_1^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi \right) + [m_1(\tau + 1) - \tau n] \times \end{aligned}$$

$$\times (\operatorname{arctg} \frac{2m_2 by}{m_2^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) + (m_2 - m_1) (\Upsilon + 1) \times$$

$$\times (\operatorname{arctg} \frac{2nby}{n^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) \},$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha P_0 m_1 m_2}{\pi (m_2 - m_1)} \left\{ m_2 (\operatorname{arctg} \frac{2m_2 by}{m_2^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) - \right.$$

$$- m_1 (\operatorname{arctg} \frac{2m_1 by}{m_1^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) \left. \right\} + \frac{\beta P_0}{\pi (m_2 - m_1)} \left\{ m_1^2 [\Upsilon n - \right.$$

$$- m_2 (\Upsilon + 1)] (\operatorname{arctg} \frac{2m_1 by}{m_1^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) + m_2^2 [m_1 (\Upsilon + 1) -$$

$$- \Upsilon n] (\operatorname{arctg} \frac{2m_2 by}{m_2^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) + (m_2 - m_1) (\Upsilon n^2 - 1) \times$$

$$\times (\operatorname{arctg} \frac{2nby}{n^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi) \left. \right\},$$

$$\tau_{xy} = \frac{\alpha P_0 m_1 m_2}{2\pi (m_2 - m_1)} \left\{ \ln \frac{m_1^2 y^2 + (x+b)^2}{m_1^2 y^2 + (x-b)^2} - \ln \frac{m_2^2 y^2 + (x+b)^2}{m_2^2 y^2 + (x-b)^2} \right\} -$$

$$- \frac{\beta P_0}{2\pi (m_2 - m_1)} \left\{ m_1 [\Upsilon n - m_2 (\Upsilon + 1)] \ln \frac{m_1^2 y^2 + (x+b)^2}{m_1^2 y^2 + (x-b)^2} + \right.$$

$$+ m_2 [m_1 (\Upsilon + 1) - \Upsilon n] \ln \frac{m_2^2 y^2 + (x+b)^2}{m_2^2 y^2 + (x-b)^2} + (m_2 - m_1) \Upsilon n \times$$

$$\times \ln \frac{n^2 y^2 + (x+b)^2}{n^2 y^2 + (x-b)^2} \left. \right\},$$

$$H = \frac{\beta P_0}{\pi \gamma} (\operatorname{arctg} \frac{2nby}{n^2 y^2 - b^2 + x^2} + \nu \pi),$$

где

$$m_1 = \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad a = \frac{1 - \mu_{xz}^2}{E_x};$$

$$b = \frac{1}{G} - \frac{\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}}{E_x} - \frac{\mu_{yx} + \mu_{zx} \mu_{yz}}{E_y}; \quad c = \frac{1 - \mu_{yz}^2}{E_y};$$

$$\gamma = \frac{[(1 - \mu_{xz}^2) - (\mu_{xy} + \mu_{xz}\mu_{zy})]n^2 - ka[(1 - \mu_{yz}^2) - (\mu_{yx} + \mu_{zx}\mu_{zy})]}{E_x(n^2 - m_1^2)(n^2 - m_2^2)}$$

условия по  $\nu$ :

при  $y = 0$ :  $\nu = 1$  для  $-b \leq x \leq b$ ,  $\nu = 0$  для  $|x| > b$ ;

при  $y > 0$ :  $\nu = 1$  для  $y^2 - b^2 + x^2 < 0$ ,  $\nu = 0$  для  $y^2 - b^2 + x^2 \geq 0$ .

Величины  $m_1$  и  $m_2$  имеют действительные значения при  $k_a = \frac{E_x}{E_y} > 1$ . Ко-

нечные формулы для напряжений и напорной функции удовлетворяют всем поставленным граничным условиям.

На основании полученных формул составлен комплекс программ для расчета напряжений и напорной фильтрационной функции в начальный момент от действия на ортотропное водонасыщенное основание равномерно распределенной нагрузки. Программы реализованы на алгоритмическом языке ФОРТРАН и позволяют определить напряжения и давления в грунтовой воде в любой точке по глубине и ширине основания. Подпрограмма вывода на АЦПУ картины силового поля позволяет на основании расчета напряжений и напорной фильтрационной функции во всех точках сетки основания определить зоны

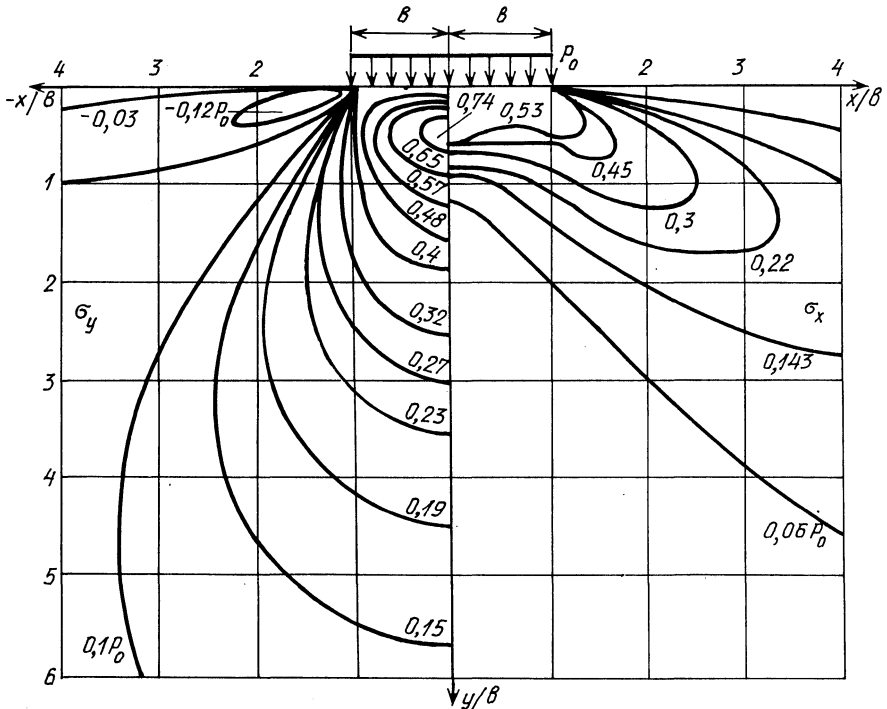


Рис. 2. Распределение вертикальных  $\sigma_y$  и горизонтальных  $\sigma_x$  напряжений

одинакового напряжения и построить изолинии распределения начальных напряжений по сечению основания.

На рис. 2 и 3 представлены графические зависимости начальных напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  давлений в грунтовой воде для ортотропного водонасыщенного основания от действия единичной равномерно распределенной полосовой нагрузки ( $b = 1$ ) на ленточных глинах (г. Витебск). Основание имеет следующие механические и фильтрационные характеристики:

$$k_a = \frac{E_x}{E_y} = 1,21, \mu = 0,35, \alpha = 0,4; n^2 = K_x/K_y = 37, \beta = 0,6.$$

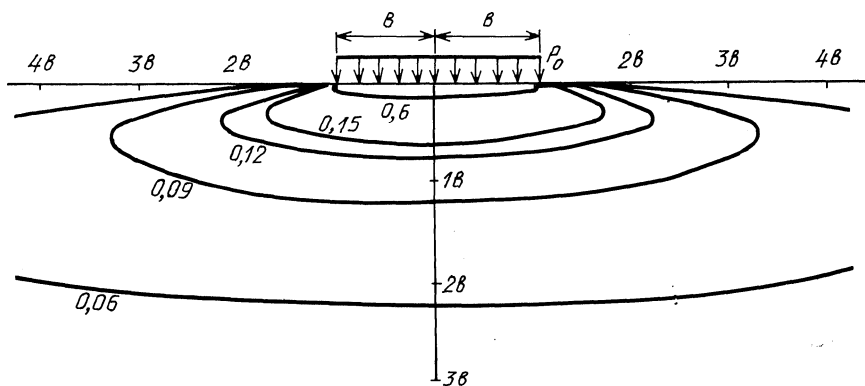


Рис. 3. Распределение давлений в грунтовой воде  $p = \gamma H$

Для расчета и построения графических зависимостей время счета комплекса программы на ЕС 1036 составляет 6 мин.

Разработанный комплекс программ может быть использован для проведения исследований грунтов оснований с различными механическими и фильтрационными характеристиками.

#### Л и т е р а т у р а

1. Герсеванов Н.М. Основы динамики грунтовой массы. — М., 1937. — 241 с.
2. Соболевский Ю.А. Водонасыщенные откосы и основания. — Минск, 1975. — 398 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.; Л., 1950. — 299 с.
4. Соболевский С.В. Расчет напряжений и напорной фильтрационной функции в анизотропном водонасыщенном основании в начальный период приложения внешней нагрузки // Водное хозяйство и гидротехническое строительство. — Минск, 1985. — Вып. 14. — 103 с.
5. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. — М., 1956. — 20 с.