ветствует азимут вектора смещения дождя 118 град (в данном примере направление вектора смещения дождя противоположно направлению прямой $Y = -\frac{1}{K} X$).

Подводя итоги, можно сказать, что для определения вектора смещения дождя необходимо иметь данные определенных плювиографических наблюдений не менее чем по трем пунктам территории. Ошибка в определении неустойчивого вектора смещения дождя зависит от числа пунктов наблюдений и уменьшается с увеличением этого числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаронок Б.М. Особенности формирования стока в условиях смещающихся дождей. — В сб.: Водное хозяйство и гидротехническое строительство. Минск, 1981, вып. 11.

УДК 532.517.4

Э.П.КОВАЛЕНКО, канд.техн.наук, зам. директ. (ЦНИИКИВР)

К ПОСТРОЕНИЮ ПЛАНА ПОВЕРХНОСТНЫХ СКОРОСТЕЙ ПРИ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВОДЫ

Знание осредненных поверхностных скоростей, кроме теоретического, представляет существенный практический интерес. Так, знание распределения осредненных поверхностных скоростей важно для организации защиты от загрязнения и очистки потока от плавающих загрязнителей, а также для лесосплава и судоходства.

При решении таких задач широкое применение находит способ, основанный на линеаризации системы дифференциальных уравнений неустановившегося движения воды для решения этой системы методом итерации [1, 4].

Базисным вопросом, на который необходимо дать ответ при использовании такого способа, является наличие совместимости и единственности решения линеаризованной системы уравнений. В статье анализируются условия, при которых такая система уравнений совместна и имеет единственное решение при построении плана поверхностных скоростей плавно изменяющегося неустановившегося движения воды в случае, когда решение плановой задачи распределения средних на вертикали скоростей известно [1].

Система дифференциальных уравнений движения в рассматриваемом случае приводится к виду [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = i_{ox} - \dfrac{1}{g}\left(v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_x}{\partial t}\right) - \dfrac{v v_x}{K_м^2}; \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = i_{oy} - \dfrac{1}{g}\left(v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial t}\right) - \dfrac{v v_y}{K_м^2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где H — глубина; v — осредненная поверхностная скорость; i_0 — уклон; g — ускорение силы тяжести; $K_м$ — гидравлическая проводимость русла в рассматриваемой точке; x, y — координаты.

При допущении, что $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ равны значениям, полученным при решении плановой задачи распределения средних на вертикали скоростей [1], построение планов осредненных поверхностных скоростей сводится к решению системы уравнений (1).

В виде допущения будем считать, что

$$\begin{cases} v_{x,i,j,l+1} = 2v_{xi,j,l} - v_{xi,j,l-1}; \\ v_{y,i,j,l+1} = 2v_{yi,j,l} - v_{yi,j,l-1}, \end{cases} \tag{2}$$

где l — номер расчетного шага во времени (рис. 1).

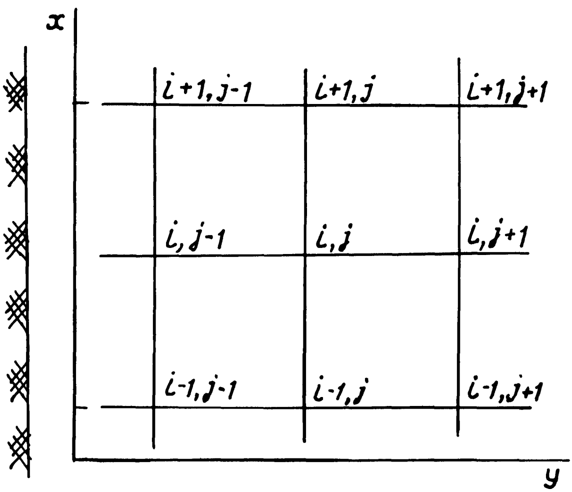

Рис. 1. Схема расчетной сетки для момента времени t_l.

Тогда в конечно-разностном виде систему уравнений (1) можно привести к виду для момента времени t_l

$$\frac{H_{i+1,j,l} - H_{i-1,j,l}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j}} = i_{oxi,j} - \frac{1}{g}\left(v_{xij,l}\,\frac{v_{xi+1,j,l} - v_{xi-1,j,l}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}} + \right.$$

$$\left. + v_{yi,j,l}\,\frac{v_{x,i,j+1,l} - v_{xi,j-1,l}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}} + 2\,\frac{v_{x,i,j,l} - v_{yi,j,l-1}}{t_{l+1} - t_{l-1}}\right) - v_{ijl}\,\frac{v_{xi,j,l}}{K^2_{м\,i,j,l}}; \tag{3}$$

3 Зак. 6551

$$\frac{H_{i,j+1,l}-H_{i,j-1,l}}{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}} = i_{oy\,i,j,l} - \frac{1}{g}\left(v_{y\,i,j,l}\frac{v_{y\,i,j+1,l}-v_{y\,i,j-1,l}}{y_{ij+1}-y_{i,j-1}} + \right.$$

$$\left. + v_{x\,i,j,l}\frac{v_{y\,i+1,j,l}-v_{y\,i-1,j,l}}{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}} + 2\frac{v_{y\,i,j,l}-v_{y\,i,j,l-1}}{t_{l+1}-t_{l-1}}\right) - v_{i,j,l}\frac{v_{y\,i,j,l}}{K^2_{м\;i,j,l}}.$$

Систему уравнений (3) записываем как

$$\begin{gathered} b_j v_{x\,i+1,j,l} + C_{1\,j+1} v_{x\,i+1,j+1,l} + C_{2j-1} v_{x\,i+1,j-1,l} + f_1 v_{x\,i+1j,l} + g_{3j} = 0; \\ d_{1j+1} v_{y\,i+1j+1,l} + d_{2j-1} v_{y\,i+1,\,j-1,l} + l_j v_{y\,i+1,\,j,l} + f_j v_{y\,i+1,j,l} + g_{4,j} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$b_j = \frac{v_{x\,i,j,l}}{g}\,\frac{1}{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}};\quad C_{1j+1} = \frac{v_{y\,i,j,l}}{2g\,(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})};$$

$$C_{2j-1} = -\frac{v_{y\,i,j,l}}{2g}\,\frac{1}{(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})};\; g_{3j} = \frac{H_{i+1,j,l}-H_{i-1,j,l}}{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}} -$$

$$- i_{ox\,i,j} - \frac{V_{x,i,j,l}\,v_{x\,i-1,j,l}}{g\,(x_{i+1,j}-x_{i-1,j})} + \frac{v_{y\,i,j,l}\,v_{x\,i-1,j+1,l}}{2g\,(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})} -$$

$$- \frac{v_{y\,i,j,l}v_{x\,i-1,j-1,l}}{2g\,(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})} + 2\frac{v_{x,i,j,l}-v_{y\,i,j,l-1}}{t_{l+1}-t_{l-1}} + v_{i,j,l}\,\frac{v_{x\,i-1,j,l}}{2K^2_{м,i,j,l}};$$

$$f_j - \frac{v_{i,j,l}}{2K^2_м};\; d_{1\,j+1} = \frac{v_{yijl}}{2g\,(y_{i,j+1}-y_{i,j-1})};\; d_{2j-1} = -\frac{v_{yijl}}{2g\,(y_{ij+1}-y_{i,j-1})};$$

$$l_j = \frac{v_{x\,i,j,l}}{g}\,\frac{1}{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}};$$

$$g_{4j} = \frac{H_{i,j+1,l}-H_{i,j-1,l}}{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}} - i_{oy\,i,j} + \frac{v_{y\,i,j,l}}{2g}\,\frac{v_{y\,i-1,j+1,l}-v_{y\,i-1,j-1,l}}{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}} -$$

$$- \frac{v_{x\,i,j,l}}{g}\,\frac{v_{y\,i-1,j,l}}{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}} + \frac{v_{y\,i,j,l}-v_{y\,i,j,l-1}}{t_{l+1}-t_{l-1}} - v_{i,j,l}\,\frac{v_{y\,i,j,l}}{K^2_{м\;i,j,l}}.$$

Учитывая, что осредненные скорости у стенок равны нулю, система уравнений (4) содержит 2n уравнений с 2n неизвестными и является замкнутой.

В рассматриваемом случае можно полагать, что [2]

$$v_{x\,i,j,l} = \frac{K^2_{м\;i,j,l}\,J_{xij,l}}{v_{мij,l}}; \tag{5}$$

$$v_{yi,j,l} = \frac{K^2_{Mi,j,l} J_{yi,j,l}}{v_{Mi,j,l}}, \tag{6}$$

где

$$v_{Mij,l} = \sqrt{v^2_{xi,j,l} + v^2_{yi,j,l}};$$

$$J_{x,i,j,l} = i_{oxi,j} - \frac{H_{i+1,j,l} - H_{i-1,j,l}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}} - \frac{u_{xi,j,l}}{g} \frac{u_{xi+1,j,l} - u_{xi-1,j,l}}{x_{i+1j} - x_{i-1,j}} - \frac{u_{yi,j,l}}{g} \frac{u_{xi,j+1,l} - u_{xi,j-1,l}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}; \tag{7}$$

$$J_{yi,j,l} = i_{oyi,j} - \frac{u_{yi,j,l}}{g} \frac{u_{yi,j+1,l} - u_{yi,j-1,l}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}} - \frac{u_{xi,j,l}}{g} \frac{u_{yi+1,j,l} - u_{yi-1,j,l}}{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}} - \frac{H_{i,j+1,l} - H_{i,j-1,l}}{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}, \tag{8}$$

где u — средняя скорость на вертикали.

В правой части (7) и (8) из решения плановой задачи распределения средних на вертикали скоростей нам известны значения всех составляющих.

Соотношения (5) и (6) при наличии решения плановой задачи распределения средних на вертикали скоростей способствуют нахождению значений v_x и v_y в заданных точках створа $i+1$.

Значения проекций поверхностных скоростей в точке i, j можно считать, равны

$$v_{x,i,j,l} = \frac{v_{xi+1,j,l} + v_{xi-1,j,l}}{2}$$

и

$$v_{yi,j,l} = \frac{v_{yi+1,j,l} + v_{yi-1,j,l}}{2}. \tag{9}$$

Если в створе $i - 1$ значения v_x и v_y нам заданы или получены в процессе расчета, то из (9) определяем v_x и v_y в створе i.

Если значения v_x и v_y в створе $i-1$ нам неизвестны, то за таковые можно принять v_x и v_y, подсчитанные по (5) и (6).

Принимая полученные таким образом значения v_x и v_y в створе i в первом приближении заданными, определяем значения коэффициентов b_j, C_{1j+1}, C_{2j-1}, f_j, g_{3j}, $d_{1,j+1}$, $d_{2,j-1}$, l_j, f_j, g_{4j}. В полученную систему линейных алгебраических уравнений входит n уравнений, содержащих n неизвестных (учитывая, что осредненные скорости у стенок равны нулю и являются замкнутой системой).

В общем виде эту систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Учитывая, что ряд коэффициентов a равен нулю [1], систему уравнений (10) приведем к виду

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{15}x_5 + b_1 = 0; \\
a_{22}x_2 + a_{24}x_4 + a_{26}x_6 + b_2 = 0; \\
a_{33}x_3 + a_{35}x_5 + a_{37}x_7 + b_3 = 0; \\
a_{44}x_4 + a_{46}x_6 + a_{48}x_8 + b_4 = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + a_{n-1,n+1}x_{n+1} + a_{n-1,n+3}x_{n+3} + b_{n-1} = 0;
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

$$a_{n,n}x_n + a_{n,n+2}x_{n+2} - a_{n,n+4}x_{n+4} + b_n = 0,$$

где

$$a_{11} = C_{11}, a_{13} = в_3 + f_3;\ a_{15} = C_{15};\ a_{22} = d_{22};$$
$$a_{24} = l_4 + f_4;\ a_{26} = d_{16};\ b_1 = g_{31};\ b_2 = g_{42}$$

и т.д.

Матрица системы (11) имеет вид

$$D = \left\{\begin{array}{l}
a_{11}0_{12}a_{13}0_{14}a_{15}0_{16}0_{17}0_{18} \ldots 0_{1,n+1},\ 0_{1,n+2}0_{1,n+3}0_{1,n+4}; \\
0_{21}a_{22}0_{23}a_{24}0_{25}a_{26}0_{27}0_{28} \ldots 0_{2n+1} \ldots 0_{2n+4}; \\
0_{31}0_{32}a_{33}0_{34}a_{35}0_{36}a_{37}0_{38} \ldots 0_{3n+1} \ldots 0_{3n+4}; \\
0_{41}0_{42}0_{43}a_{44}0_{45}a_{46}0_{47}a_{48}0_{49} \ldots 0_{4n+1} \ldots 0_{4n+4}; \\
0_{n-1,1} \ldots a_{n-1,\,n-1}0_{n-1,n}a_{n-1,n+1}0_{n-1,n+2}a_{n-1,n+3}0_{n-1,n+4}; \\
0_{n,1} \ldots 0_{n,n-1}a_{n,n}0_{n,n+1}a_{n,n+2}0_{n,n+3}a_{n,n+4}.
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Согласно теореме линейной алгебры, строки $A_1 \ldots A_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них линейно выражается через остальные [3].

Докажем, что в матрице (12) ни одна строка не может линейно выражаться через остальные (условие: коэффициенты $a \neq 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что строка $C = (c_1, c_2 \ldots c_n)$ является линейной комбинацией строк $A = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ и $B = (b_1 b_2 \ldots b_n)$ с коэффициентами α и β. Данное условие можно записать:

$$
\begin{array}{l}
\alpha(a_1, a_2 \dots a_n) \\
\beta(b_1, b_2 \dots b_n) \\
\hline
(c_1, c_2 \dots c_n)
\end{array}
\tag{13}
$$

Это означает выполнение n числовых равенств:

$$\alpha a_i + \beta b_1 = c_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Если А и В являются предыдущими строками матрицы (12) или их линейной комбинацией, а С — последующей строкой, то в строке С всегда имеется коэффициент $C_i \neq 0$, аналоги которого в (13) $a_i = 0$ и $b_i = 0$. В случае симметричности потока рассматривается только часть симметрии.

Следовательно, если коэффициенты α и β не являются бесконечными величинами, условие (14) не может быть выполнено. Это доказывает, что строки матрицы D линейно независимы.

Каждый столбец матрицы D имеет элемент, отличающийся от нуля. Аналоги же его во всех предыдущих столбцах равны нулю.Следовательно,как это сделано и для строк , доказывается, что столбцы матрицы D являются линейно независимыми.

Согласно теореме о базисном миноре, всякий столбец матрицы является линейной комбинацией ее базисных столбцов, а всякая ее строка — линейной комбинацией базисных строк.

Так как в рассматриваемом случае ни один столбец и ни одна строка не являются, как доказано выше,линейной комбинацией ее (матрицы) базисных столбцов, то базисный минор матрицы D совпадает с самой матрицей D, а ее ранг равен числу уравнений.

В соответствии со следствием теоремы о базисном миноре, которое является необходимым и достаточным условием равенства нулю определителя, определитель тогда и только тогда равен нулю, когда его столбцы линейно зависимы.

В рассматриваемом случае матрицы D столбцы определителя являются линейно независимыми, поэтому он не равен нулю.

Но определитель матрицы D является определителем системы уравнений (11). Тогда в соответствии с теоремой Крамера (утверждающей, что если определитель D системы (11) отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение [3]) система уравнений (11) совместна и имеет единственное решение.

Решение задачи практически возможно только с помощью современных ЭВМ. Алгоритм решения рассмотренной системы уравнений аналогичен, например, приведенному в работе [4].

Необходимо обратить внимание на то, что x_1 и x_2 в системе уравнений (11), а также x_{n+3} и x_{n+4} равен нулю из условия равенства нулю осредненных скоростей на стенке русла.

Поэтому число неизвестных в системе (11) равно не n+4, а лишь n. Значения x_1, x_2, x_{n+3} и x_{n+4} не исключены для общности, так как их присутствие, не меняя существа, добавляет наглядность проведенным доказательствам.

Если нам известны решения плановой задачи неустановившегося движения в створах i–1 в моменты t и t+Δt, а в момент t в створе i+1, то решение задачи для створа i+1 в момент времени t+Δt имеется и оно является единственным при вышеназванных условиях и допущениях.

Расчетная схема решения задачи является аналогичной приведенной в статье [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко Э.П. Построение планов течений плавно изменяющегося неустановившегося потока. — В сб.: Водное хозяйство и гидротехническое строительство. Минск, 1981, вып. 11. 2. Коваленко Э.П. Исследование движения воды в открытых руслах. Минск, 1963. 3. Карпелович Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. — М., 1963. 4. Connor I.I. Brebbia C.A. Finite Element Techniques or Fluid Flow. — Newnes — Butterworths. London, Baston, 1976.

УДК 712.5 (282) +627.41

И.В. ФИЛИППОВИЧ, канд. техн. наук, зав.каф.,
Е.М.ЛЕВКЕВИЧ, канд. техн.наук, доц.,
Н.М. КУНЦЕВИЧ, канд. техн. наук, доц.,
В.Н. ПЕНЬКЕВИЧ, ст. препод. (БПИ)

ВОПРОСЫ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ УЧАСТКА ПОЙМЫ, СТЕСНЕННОЙ НАМЫВАЕМОЙ ТЕРРИТОРИЕЙ

Инженерная защита территорий, примыкающих к берегам морей, озер, водохранилищ, рек и каналов, представляет собой сложную техническую проблему, к которой в настоящее время, и в особенности в будущем, все чаще и чаще обращаются градостроители.

Постоянно растущие масштабы и темпы строительства новых, расширение и развитие существующих городов, охрана земель, пригодных под сельскохозяйственное использование, охрана недр и лесных массивов настоятельно требуют освоения территорий, не включаемых в сельскохозяйственное производство со сложными природными условиями, ранее считавшихся непригодными и для городской застройки.

Вовлечение этих земель в использование народным хозяйством позволит на длительный период сохранить площади пахотных земель, не прибегая к мелиорации новых территорий.

Для условий Белорусской ССР, Прибалтики и значительной части Нечерноземной зоны РСФСР к категории неудобных земель под городскую застройку относятся бедные пойменные,затапливаемые в паводок территории, расположенные вблизи городов. Такие территории часто заболачиваются, зарастают мелким кустарником и камышом; в засушливые периоды года, пересыхая, они могут стать очагом болотных пожаров. Естественно, что такие территории должны переустраиваться в инженерном отношении в соответствии с противопожарными и санитарно-гигиеническими требованиями.