

УДК 621.311.7: 621.382

**СИНТЕЗ НАПРЯЖЕНИЙ МНОГОКРАТНЫХ  
РАВНОМЕРНЫХ ШИМ, СОЗДАНЫХ  
ПО СТУПЕНЧАТЫМ ФУНКЦИЯМ ПОСТРОЕНИЯ**

Канд. техн. наук, доц. СТРИЖНЕВ А. Г., инж. ЛЕДНИК Г. В.

*ООО «Техносоюзпроект»*

В электроприводе, содержащем электродвигатель переменного тока, используют частотные преобразователи, которые формируют напряжения многократной равномерной ШИМ. Существуют различные способы формирования указанной ШИМ [1], один из которых базируется на использовании модулирующей ступенчатой функции построения. При данном способе выходное напряжение  $U_{\text{вых}}$  образуется в результате сравнения ступенчатого, аппроксимирующего синусоиду эталонного напряжения  $U_{\text{эт}}$  и пилообразного опорного напряжения  $U_{\text{оп}}$ . Формирование напряжения  $U_{\text{вых}}$  указанным способом требует либо мощных универсальных микроконтроллеров, либо специализированных, относительно дорогих микроконтроллеров. Значительно проще можно сформировать многократную равномерную ШИМ табличным или индексным табличным способом [2]. Однако для этого нужно аналитически определить параметры ШИМ импульсов и качественно оценить гармонический состав напряжения многократных равномерных ШИМ, созданных по ступенчатым функциям построения.

**Создание эталонного и опорного напряжений.** Создание эталонного ступенчатого напряжения  $U_{\text{э}}$  связано с заданием его параметров (рис. 1), к которым относят [3]:  $Q_m$  – фазовый угол  $m$ -й ступеньки, отсчитанный от момента прохождения переменного синусоидального напряжения через нулевое значение;  $M_m$  – амплитуда произвольно выбранной  $m$ -й ступеньки;  $m$  – порядковый номер ступеньки,  $m = 1, 2, 3, \dots, r$ ;  $U_a$  – амплитуда синусоидального напряжения.

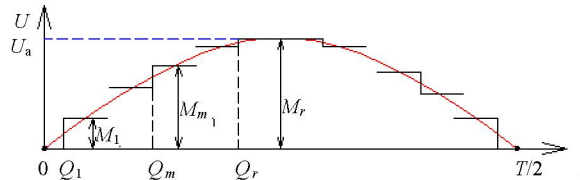


Рис. 1. Ступенчатая аппроксимация синусоидального напряжения

При создании ступенчатого эталонного напряжения нужно знать количество ступенек в полупериоде, имеется  $Q_1 \neq 0$  или отсутствует  $Q_1 = 0$  пауза на нулевом уровне. При выборе количества ступенек исходят из того [3], что для устранения высших гармонических составляющих с номерами от 3-го до  $\nu$ -го необходимо иметь всего  $r = 0,25(\nu + 1)$  ступенек в кривой (рис. 1) аппроксимирующего синусоиду напряжения.

Здесь  $r$  – ближайшее (с округлением вверх) целое число 2, 3, 4, ...;  $\nu = 5, 7, 9, \dots$

Различают [1] четыре вида (рис. 1) эталонного напряжения, параметры которого запишем аналитически:

а) нечетное количество ступенек  $l = 2r - 1$  при отсутствии паузы на нулевом уровне  $Q_1 = 0$  с параметрами:  $Q_m = \frac{(m-1)T}{2(2r-1)}$ ;  $M_m = U_a \sin \varphi_m$ ;

$$\varphi_m = Q_m + \frac{\theta}{2} = \frac{(2m-1)T}{4(2r-1)}; \quad \theta = \frac{T}{2(2r-1)};$$

б) нечетное количество ступенек  $l = 2r - 1$  при наличии паузы на нулевом уровне  $Q_1 \neq 0$  с параметрами:  $Q_m = \frac{(2m-1)T}{8r}$ ;  $M_m = U_a \sin \varphi_m$ ;

$$\varphi_m = Q_m + \frac{\theta}{2} = \frac{mT}{4r}; \quad \theta = \frac{T}{4r};$$

в) четное количество ступенек  $l = 2r$  при отсутствии паузы на нулевом уровне  $Q_1 = 0$  с параметрами:  $Q_m = \frac{(m-1)T}{4r}$ ;  $M_m = U_a \sin \varphi_m$ ;  $\varphi_m = Q_m +$

$$+ \frac{\theta}{2} = \frac{(2m-1)T}{8r}; \quad \theta = \frac{T}{4r};$$

г) четное количество ступенек  $l = 2r$  при наличии паузы на нулевом уровне  $Q_1 \neq 0$  с параметрами:

$$Q_m = \frac{(2m-1)T}{4(2r+1)}; \quad M_m = U_a \sin \varphi_m; \quad \varphi_m = Q_m + \frac{\theta}{2} = \frac{mT}{2(2r+1)}; \quad \theta = \frac{T}{2(2r+1)}. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi_m$  – центральный фазовый угол  $m$ -й ступеньки, отсчитанный от момента прохождения переменного синусоидального напряжения через нулевое значение до середины ступеньки;  $\theta$  – длительность ступеньки;  $T$  – период синусоидального напряжения;  $l$  – количество ступенек в полупериоде,  $l = 3, 4, 5, \dots$ .

Создание пилообразного опорного напряжения  $U_{\text{оп}}$  осуществляют с учетом численного  $k$  значения ШИМ импульсов на протяжении одной ступеньки функции построения, где  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

**Формирование напряжений многократных равномерных ШИМ** рассмотрим (рис. 2) на примере использования двухступенчатого  $r = 2$  эталонного напряжения с нечетным  $l = 3$  и четным  $l = 4$  количеством ступенек одинаковой протяженности в полупериоде, при отсутствии  $Q_1 = 0$  и наличии  $Q_1 \neq 0$  паузы на нулевом уровне, на каждой ступеньке которого создается всего лишь один импульс  $k = 1$ .

Последовательность ШИМ импульсов (рис. 2), имеющих постоянную амплитуду  $U_a$ , удобно характеризовать параметрами [1]:  $\alpha_i$  – фазовый угол  $i$ -го ШИМ импульса, отсчитанный от момента прохождения переменного синусоидального напряжения через нулевое значение до начала импульса,  $i = 1, 2, 3, \dots, l$ ;  $\tau_i$  – длительность  $i$ -го ШИМ импульса.

Используя выражения (1) и формулы  $\alpha_i = \varphi_m - \tau_i/2$ ;  $\alpha_i = M_m \theta / U_a$ , получим в общем виде требуемые аналитические выражения для определения параметров ШИМ импульсов:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \alpha_i &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(2i-1)T}{2(2r-1)} - \tau_i \right]; \quad \tau_i = \frac{T}{2(2r-1)} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2(2r-1)}; \\
 \text{б) } \alpha_i &= \frac{1}{2} \left[ \frac{iT}{2r} - \tau_i \right]; \quad \tau_i = \frac{T}{4r} \sin \frac{i\pi}{2r}; \\
 \text{в) } \alpha_i &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(2i-1)T}{4r} - \tau_i \right]; \quad \tau_i = \frac{T}{4r} \sin \frac{(2i-1)\pi}{4r}; \\
 \text{г) } \alpha_i &= \frac{1}{2} \left[ \frac{iT}{2r+1} - \tau_i \right]; \quad \tau_i = \frac{T}{2(2r+1)} \sin \frac{i\pi}{2r+1}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь параметры ШИМ импульсов определены через число  $r$  ступенек эталонного напряжения  $U_{\text{эт}}$ , общее количество которых может быть любым,  $r = 2, 3, 4, \dots$ .

Используя выражения (2), можно не только программно сформировать многократную равномерную ШИМ, но и осуществить ее спектральный и качественный анализ.

**Спектральный анализ напряжений многократных равномерных ШИМ** осуществим для примеров, приведенных на рис. 2. Напряжение многократной ШИМ можно рассматривать как сумму напряжений однократных ШИМ и представить рядом Фурье [4]

$$u(t) = \sum_{i=1}^l \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin n\omega t, \quad (3)$$

где  $l$  – число импульсов в полупериоде;  $U_n$  – амплитуда гармоники;  $\omega = 2\pi/T$  – основная частота;  $n$  – номер гармоники,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

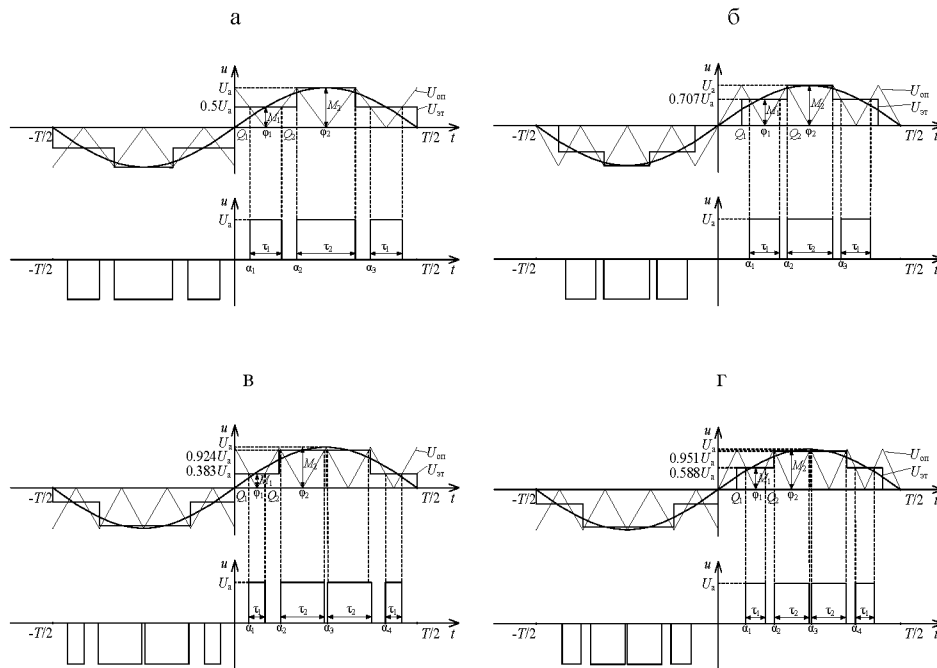


Рис. 2. Примеры формирования напряжений многократных равномерных ШИМ

Выражение для определения амплитуды  $n$ -й гармоники отдельных импульсов можно получить следующим образом [5]:

$$U_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} U_a \sin n\omega t dt = \frac{4U_a}{T} \int_{\alpha_i}^{\alpha_i + \tau_i} \sin n\omega t dt = \frac{4U_a}{n\pi} \sin n\omega\varphi_i \sin \frac{n\omega\tau_i}{2}, \quad (4)$$

где  $\alpha_i$  – фазовый угол  $i$ -го импульса;  $\tau_i$  – длительность  $i$ -го импульса;  $\varphi_i = \alpha_i + \tau_i/2$  – центральный фазовый угол  $i$ -го импульса.

Регулирование скорости двигателя можно осуществить путем изменения длительности импульсов (широтно-импульсное регулирование)

$$\tau_i^* = \tau_i / q, \quad (5)$$

где  $q$  – параметр регулирования,  $q = 1 - \infty$ .

Следует заметить, что при этом происходит изменение фазового угла  $i$ -го ШИМ импульса

$$\alpha_i^* = \varphi_i - \tau_i^* / 2. \quad (6)$$

Используя формулы (1), (2), (4), (5), запишем выражения для определения амплитуды  $n$ -й гармоники при регулировании:

а) для напряжения (рис. 2а)

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \left[ \sin n\omega\varphi_1 \sin \frac{n\omega\tau_1^*}{2} + \sin n\omega\varphi_2 \sin \frac{n\omega\tau_2^*}{2} + \sin n\omega\varphi_3 \sin \frac{n\omega\tau_3^*}{2} \right], \quad (7a)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\varphi_1 = \frac{T}{12}$ ;  $\tau_1^* = \frac{T}{12q}$ ;  $\varphi_2 = \frac{T}{4}$ ;  $\tau_2^* = \frac{T}{6q}$ ;  $\varphi_3 = \frac{5T}{12}$ ;  $\tau_3^* = \tau_1^*$ ;

б) для напряжения (рис. 2б)

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \left[ \sin n\omega \varphi_1 \sin \frac{n\omega \tau_1^*}{2} + \sin n\omega \varphi_2 \sin \frac{n\omega \tau_2^*}{2} + \sin n\omega \varphi_3 \sin \frac{n\omega \tau_3^*}{2} \right], \quad (7б)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\varphi_1 = \frac{T}{8}$ ;  $\tau_1^* = \frac{T}{8q} \sin \frac{\pi}{4}$ ;  $\varphi_2 = \frac{T}{4}$ ;  $\tau_2^* = \frac{T}{8q}$ ;  $\varphi_3 = \frac{3T}{8}$ ;  $\tau_3^* = \tau_1^*$ ;

в) для напряжения (рис. 2в)

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \left[ \begin{aligned} &\sin n\omega \varphi_1 \sin \frac{n\omega \tau_1^*}{2} + \sin n\omega \varphi_2 \sin \frac{n\omega \tau_2^*}{2} + \\ &+ \sin n\omega \varphi_3 \sin \frac{n\omega \tau_3^*}{2} + \sin n\omega \varphi_4 \sin \frac{n\omega \tau_4^*}{2} \end{aligned} \right], \quad (7в)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\varphi_1 = \frac{T}{16}$ ;  $\tau_1^* = \frac{T}{8q} \sin \frac{\pi}{8}$ ;  $\varphi_2 = \frac{3T}{16}$ ;  $\tau_2^* = \frac{T}{8q} \sin \frac{3\pi}{8}$ ;  $\varphi_3 = \frac{5T}{16}$ ;  
 $\tau_3^* = \tau_2^*$ ;  $\varphi_4 = \frac{7T}{16}$ ;  $\tau_4^* = \tau_1^*$ ;

г) для напряжения (рис. 2г)

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \left[ \begin{aligned} &\sin n\omega \varphi_1 \sin \frac{n\omega \tau_1^*}{2} + \sin n\omega \varphi_2 \sin \frac{n\omega \tau_2^*}{2} + \\ &+ \sin n\omega \varphi_3 \sin \frac{n\omega \tau_3^*}{2} + \sin n\omega \varphi_4 \sin \frac{n\omega \tau_4^*}{2} \end{aligned} \right], \quad (7г)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $\varphi_1 = \frac{T}{10}$ ;  $\tau_1^* = \frac{T}{10q} \sin \frac{\pi}{5}$ ;  $\varphi_2 = \frac{T}{5}$ ;  $\tau_2^* = \frac{T}{10q} \sin \frac{2\pi}{5}$ ;  $\varphi_3 = \frac{3T}{10}$ ;  
 $\tau_3^* = \tau_2^*$ ;  $\varphi_4 = \frac{2T}{5}$ ;  $\tau_4^* = \tau_1^*$ .

После подстановки и несложных преобразований выражения (7а)–(7г) примут вид:

$$U_n^* = \frac{16U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{12q} \cos \frac{n\pi(4q+1)}{24q} \cos \frac{n\pi(4q-1)}{24q}; \quad (8а)$$

$$U_n^* = \frac{4U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \left[ 2 \sin \left( \frac{n\pi}{8q} \sin \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{8q} \right]; \quad (8б)$$

$$U_n^* = \frac{8U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \left[ \cos \frac{n3\pi}{8} \sin \left( \frac{n\pi}{8q} \sin \frac{\pi}{8} \right) + \cos \frac{n\pi}{8} \sin \left( \frac{n\pi}{8q} \sin \frac{3\pi}{8} \right) \right]; \quad (8в)$$

$$U_n^* = \frac{8U_a}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \left[ \cos \frac{n3\pi}{10} \sin \left( \frac{n\pi}{10q} \sin \frac{\pi}{5} \right) + \cos \frac{n\pi}{10} \sin \left( \frac{n\pi}{10q} \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right]. \quad (8r)$$

С помощью выражения (8) построены графики (рис. 3), показывающие зависимость относительных амплитуд  $U_n/U_a$  первых пяти гармоник  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  от параметра регулирования  $q = 1-6$ .

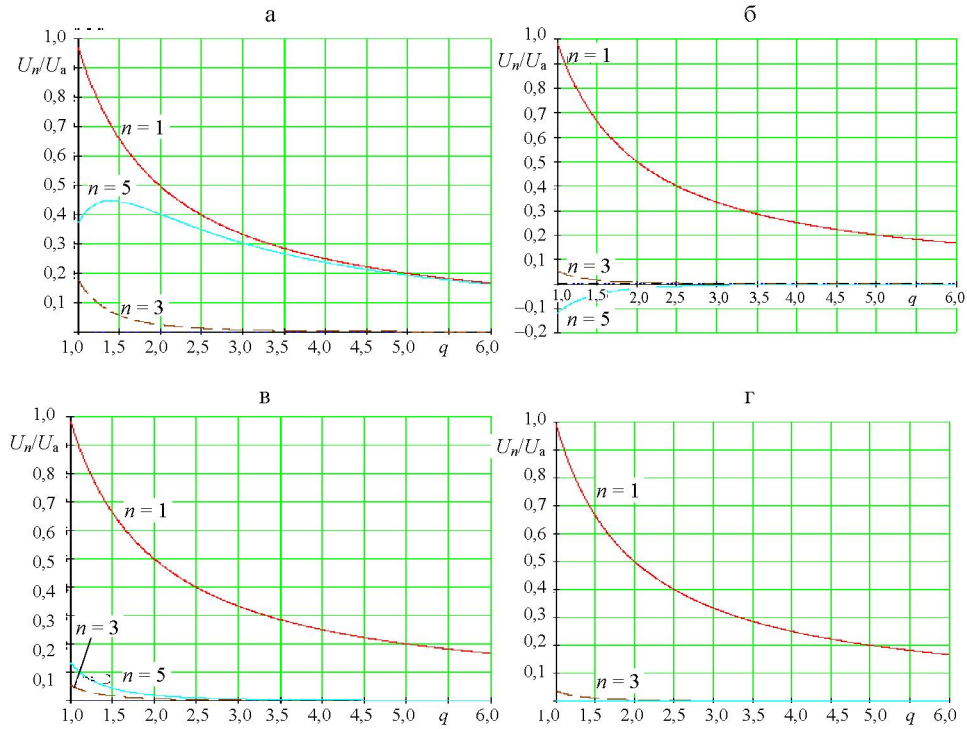


Рис. 3. Изменение относительных амплитуд  $U_n/U_a$  гармоник  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  при регулировании  $q = 1-6$

Из рис. 3 следует, что в процессе регулирования  $q = 1-6$  присутствуют только нечетные гармоники с номерами  $n = 1, 3, 5$ . Ближайшая к основной гармоника с номером  $n = 3$  присутствует в диапазоне регулирования  $q = 1,0-2,5$  и имеет начальную амплитуду не более: 18 % (рис. 3а); 5,5 % (рис. 3б, в) и 3,5 % (рис. 3г). Гармоника с номером  $n = 5$  имеет амплитуду не более 45 % (рис. 3а); 11 % (рис. 3б) и 13,5 % (рис. 3в), а в случае, как на рис. 3г, вообще отсутствует. Высшие гармоники имеют частоты, кратные их номеру  $n$  относительно частоты  $\omega$  первой основной гармоники.

**Качественный анализ напряжений многократных равномерных ШИМ** осуществим с помощью коэффициента несинусоидальности [2]

$$K_{нс} = \frac{U_{\text{ВЫХ } 1}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_{\text{ВЫХ } n}^2}}, \quad (9)$$

где  $U_{\text{вых } 1}$  – амплитуда напряжения основной (первой) гармоники;  $U_{\text{вых } n}$  – то же произвольной гармоники,  $n = 1 \dots \infty$ .

С помощью выражений (8), (9) для гармоник, имеющих номера  $n = 1-5$ , построен график (рис. 4), из которого следует, что лучшим коэффициентом  $K_{\text{нс}}$  (рис. 4, кривая 4) обладает многократная равномерная ШИМ, полученная за счет использования ступенчатого эталонного напряжения, имеющего четное количество ступенек в полупериоде и содержащего паузу на нулевом уровне. Худшим коэффициентом  $K_{\text{нс}}$  (рис. 4, кривая 1) обладает ШИМ, полученная за счет использования ступенчатого эталонного напряжения, имеющего нечетное количество ступенек в полупериоде и не содержащего паузу на нулевом уровне.

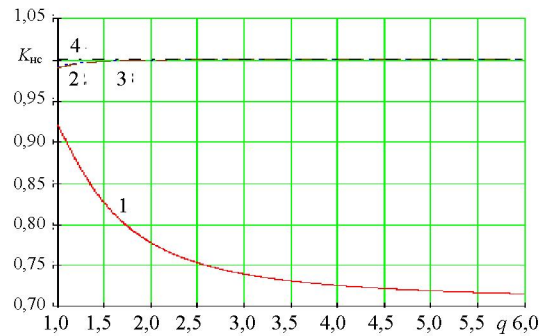


Рис. 4. Изменение коэффициента несинусоидальности при регулировании  $q = 1-6$

## ВЫВОД

Предлагаемый подход позволяет синтезировать напряжения многократных равномерных ШИМ, созданных по ступенчатым функциям построения, провести их сравнительный и качественный анализ. Получены аналитические выражения параметров ШИМ импульсов  $\alpha_i$  и  $\tau_i$ , которые можно использовать для программного формирования данного вида ШИМ, определения амплитуды  $U_n^*$  напряжений  $n$ -й гармоники при регулировании, а также для моделирования работы электродвигателя переменного тока. Лучшими показателями по критерию минимума гармонических составляющих и максимума коэффициента несинусоидальности  $K_{\text{нс}}$  при широтно-импульсном регулировании обладает напряжение (рис. 3г), при формировании которого использовано ступенчатое эталонное напряжение (рис. 2г), имеющее четное количество ступенек в полупериоде и содержащее паузу на нулевом уровне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моин, В. С. Стабилизированные транзисторные преобразователи / В. С. Моин. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 376 с.
2. Марков, В. В. Индексная табличная ШИМ в автономном инверторе напряжения / В. В. Марков, К. П. Слядзевская. – М.: Электротехника, 2000. – № 1. – С. 23–28.
3. Высокочастотные транзисторные преобразователи / Э. М. Ромаш [и др.]. – М.: Радио и связь, 1988. – 288 с.
4. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. / С. И. Баскаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988. – 448 с.