

## РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ РАМЫ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*Завадская У.А., Каретникова А.А., Конюшко Е.Ю., Стриваль А.Д.  
(научный руководитель – Каменецакая К.М.)  
Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

**Аннотация.** В ходе работы рассмотрим основные уравнения строительной механики на примере 4-х шарнирной рамы, найдем её внутренние усилия и сравним полученный результат с программным комплексом.

### Введение

Современный инженер-строитель должен иметь четкое представление обо всех этапах расчета и проектирования сооружений. Без применения основных уравнений невозможно научиться анализировать полученные результаты в программе и правильно составлять конечно-элементную модель конструкции для ее расчета.

Покажем подход к формированию матриц равновесия, внутренней и внешней жесткости исследуемой системы и отдельного стержня. Затем сформируем матрицу податливости и вектор перемещений для нашей конструкции, на их основе получим внутренние силы конструкции.

### Основная часть.

Рама состоит из 5 стержней (5 конечных элементов), 6 узлов, три из которых являются опорными. В узлах под номером 4, 5 и 6 стержни соединяются шарнирно (1 и 4, 4 и 5, 5 и 6 стержни).

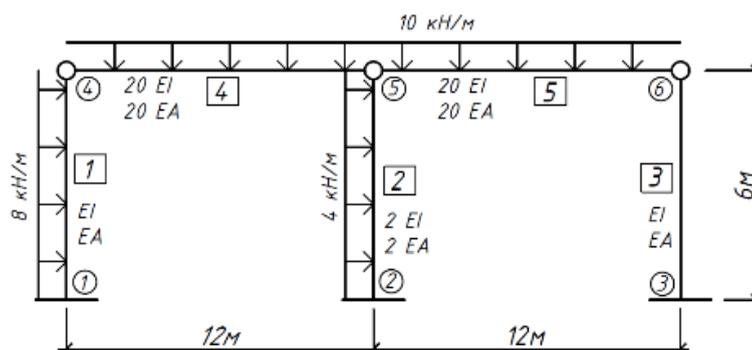
Запишем уравнение равновесия системы:

$$A \times \vec{S} = \vec{F}, \quad (1)$$

где  $A$  – матрица равновесия всей системы;

$\vec{S}$  – вектор внутренних усилий в стержнях исследуемой системы;

$\vec{F}$  – вектор внешней нагрузки;



**Рисунок 1. – Заданная расчетная схема сооружения**

Таблица 1 – Матрица равновесия всей системы для рисунка 1

= A	N <sub>1</sub>	M <sub>H1</sub>	N <sub>2</sub>	M <sub>H2</sub>	N <sub>3</sub>	M <sub>H3</sub>	N <sub>4</sub>	N <sub>5</sub>
	0	-1/6	0	0	0	0	-1	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	-1/6	0	0	1	-1
	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	-1/6	0	1
	0	0	0	0	1	0	0	0

Таблица 2 – Значения синусов и косинусов углов для стержней

	№ стержня				
	1	2	3	4	5
sin φ	1	1	1	0	0
cos φ	0	0	0	1	1

Запишем матрицу внутренней жесткости всей системы  $K$ , которая состоит из матриц внутренней жесткости отдельных стержней:

Таблица 3 – Матрица внутренней жесткости для рисунка 1

K=	10/6	0	0	0	0	0	0	0
	0	1/2	0	0	0	0	0	0
	0	0	2/6	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	1/6	0	0	0
	0	0	0	0	0	1/2	0	0
	0	0	0	0	0	0	200/12	0
	0	0	0	0	0	0	0	200/12

Представим распределенные нагрузки в виде сосредоточенных, чтобы записать вектор нагрузки  $\vec{F}$ :

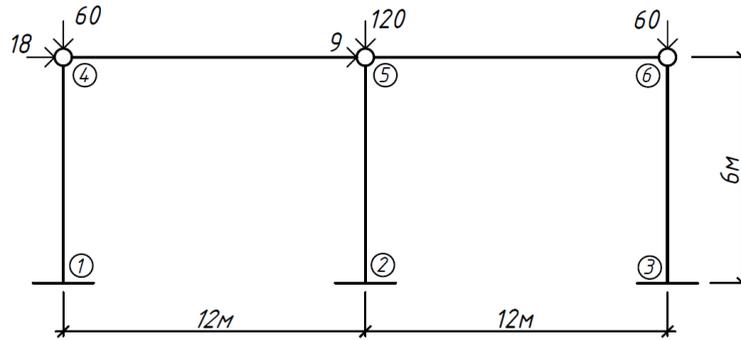


Рисунок 2. – Схема нагрузок для системы, заданной на рисунке 1

$$\vec{F} = [18; -60 | 9; -120 | 0; -60]^T \text{ Кн}$$

Вычислим матрицу внешней жесткости всей рассматриваемой системы, определяемой по формуле:

$$R = A \times K \times A^T \quad (2)$$

Таблица 4 – Матрица внешней жесткости для системы на рисунке 1

<b>R</b>	16,	0	-16,	0	0	0
	68		67			
	0	1,	0	0	0	0
		67				
	-16,	0	33,	0	-16,	0
	67		36		67	
0	0	0	3,3	0	0	
			3			
0	0	-16,	0	16,	0	
		67		68		
0	0	0	0	0	1,6	
					7	

Таблица 5 - Матрица податливости системы  $D = R^{-1}$

<b><math>R^{-1}</math></b>	18,	0	17,	0	17,98	0
	04		99			
	0	0	0	0	0	0
		,60				
17,	0	18,	0	17,99	0	
99		01				
0	0	0	0,3	0	0	
			3			

	17, 98	0	17, 99	0	18,04	0
	0	0	0	0	0	0,6 0

Вектор перемещений находим по формуле:

$$\vec{Z} = R^{-1} \times \vec{F} \quad (3)$$

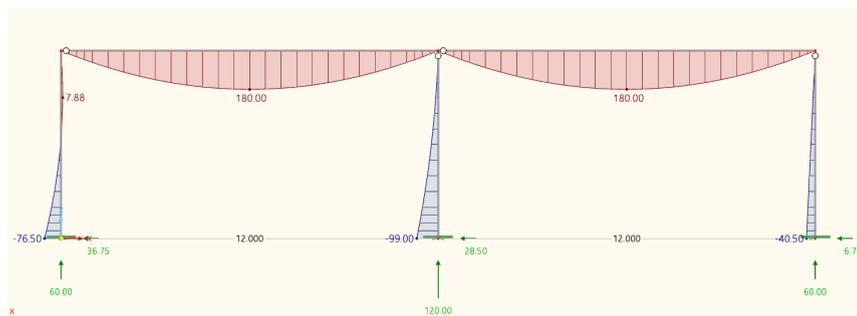
$$\vec{Z} = [486,61; -35,93; 485,93; -36,00; 485,53; -36,00] \frac{1}{EI}$$

Для построения окончательных эпюр находим вектор внутренних усилий в стержнях исследуемой системы  $\vec{S}$ :

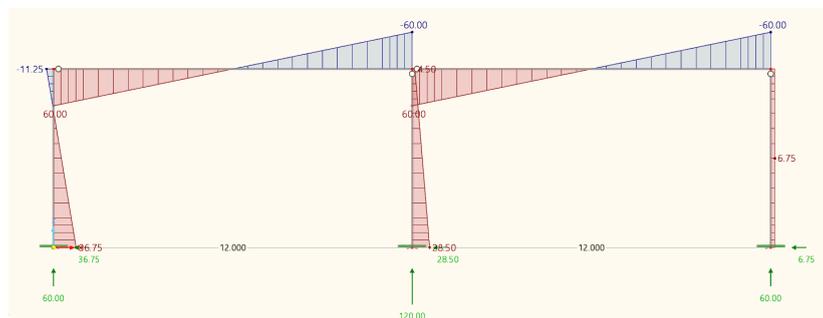
$$\vec{S} = K \times A \times \vec{Z} \quad (4)$$

$$\vec{S} = [-60; -76,5; -120; -99,98; -60; -40,46; -11,24; -6,74]$$

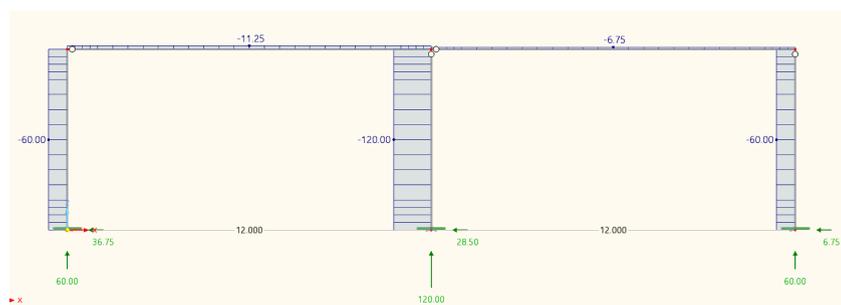
Для проверки вычислений построим эпюры в программном комплексе Dlubal RFEM 6.05.



**Рисунок 3. - Эпюра изгибающих моментов для системы 1**



**Рисунок 4. - Эпюра поперечных сил для системы 1**



**Рисунок 5. - Эпюра продольных сил для системы 1**

### **Заключение.**

Сравнивая результаты расчета рамы с помощью основных уравнений строительной механики и посредством вычисления в программном комплексе RFEM 6.05, видим, что результаты в обоих случаях абсолютно идентичны.

Однако, расчет конструкций вручную с применением основных уравнений занимает значительно больше времени, чем расчет в программном комплексе. Размерность матриц для конструкции с 5 стержнями следующая:  $A(6 \times 8)$ ,  $K(8 \times 8)$ ,  $R(6 \times 6)$ .

Современный инженер-строитель должен иметь четкое представление обо всех этапах расчета и проектирования сооружений. Без применения основных уравнений невозможно научиться анализировать полученные результаты в программе и правильно составлять конечно-элементную модель этой конструкции для ее расчета.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Борисевич, А. А. Строительная механика: учеб. пособие / А.А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Изд. 2-е. – Минск: БНТУ, 2009. – 404 с.
2. Борисевич А. А. Общие уравнения строительной механики и оптимальное проектирование конструкций: учеб. издание – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 144 с.
3. Борисевич А. А. Оптимизация нелинейно упругих стержневых систем по методу локальных линеаризованных областей – Брест: БГТУ, 2001. – 104 с.