

УДК 531.2

А.В. ЧИГАРЕВ, д-р физ.-мат. наук

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

А.В. БОРИСОВ, канд. техн. наук

Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ Московский энергетический институт», г. Смоленск

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЕТВЛЕНИЕМ

Проведено исследование статической устойчивости стержневой механической системы с ветвлением звеньев, соответствующим переносной ноге и двум рукам. Рассмотрен конкретный пример модели в виде одиннадцатизвенной антропоморфной системы в фазе опоры на одну ногу. Получено обобщение решения на случай системы с произвольным количеством звеньев. Проведено сопоставление с моделью без ветвления, указаны различия и причины их вызвавшие. Численно рассчитаны зоны устойчивости для равновесия антропоморфной механической модели. Моделирование приводов в шарнирах-суставах реализуется в виде спиральных пружин. Данная модель может быть использована при практическом проектировании антропоморфных роботов и экзоскелетов для определения минимальных усилий, которые необходимо приложить в области крупных шарниров-суставов механизма для поддержания вертикальной статической позы.

Ключевые слова: ветвление, антропоморфная стержневая механическая система, статическая устойчивость, шарниры-суставы, жесткость пружин, одноопорная фаза, обобщения

Ранее в работе [1] была предложена модель статической устойчивости экзоскелета человека в одноопорной фазе. Были получены формулы, обобщающие решение задачи статической устойчивости на случай систем с произвольным конечным количеством звеньев. Присоединенные звенья типа переносной ноги и рук моделировались сосредоточенными массами. В данной статье предлагается развитие предложенного подхода. Моделирование переносных звеньев проводится в виде стержневых многозвенных систем, присоединенных к исходной стержневой системе, имеющей одну неподвижную точку опоры (рисунок 1).

Рассмотрим одиннадцатизвенную модель (см. рисунок 1), предполагая, что в каждом шарнирном соединении имеется спиральная пружина жесткости k_i ($i = 1, 2, \dots, 11$). Определим значения жесткостей пружин, необходимые для устойчивого вертикального равновесия данной механической системы. Углы отсчитываются от вертикали в направлении по часовой стрелки, аналогично работе [1]. Чтобы не загромождать рисунок, приводятся только названия углов, а способ отсчета не указывается.

Применим к исследованию одиннадцатизвенной модели подход, предложенный нами ранее [1]. Учтем множитель, задающий точку прикрепления рук на корпусе и ветвление в точках соединения переносной ноги и рук с корпусом. В связи с ветвлением для переносной ноги и рук, суммирование в выражении необходимо проводить до номера, соответствующего последнему звену ответвляющейся конечности. Получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \sum_{i=1}^{11} k_i - \left(m_1 n_1 + \sum_{i=2}^{11} m_i \right) g l_1, \\
 c_{22} &= \sum_{i=2}^{11} k_i - \left(m_2 n_2 + \sum_{i=3}^{11} m_i \right) g l_2, \\
 c_{33} &= \sum_{i=3}^{11} k_i - \left(m_3 n_3 + \sum_{i=4}^{11} m_i \right) g l_3, \\
 c_{44} &= \sum_{i=4}^6 k_i + \left(m_5 n_5 - \sum_{i=4}^6 m_i \right) g l_4, \\
 c_{55} &= \sum_{i=5}^6 k_i + \left(m_5 n_5 - \sum_{i=5}^6 m_i \right) g l_5, \\
 c_{66} &= \sum_{i=6}^6 k_i + (m_6 n_6 - m_6) g l_6, \\
 c_{77} &= \sum_{i=7}^{11} k_i - \left(m_7 n_7 + n_{7R} \sum_{i=8}^{11} m_i \right) g l_7, \\
 c_{88} &= \sum_{i=8}^9 k_i + \left(m_8 n_8 - n_{7R} \sum_{i=8}^9 m_i \right) g l_8, \\
 c_{99} &= \sum_{i=9}^9 k_i + (m_9 n_9 - m_9) g l_9, \\
 c_{10,10} &= \sum_{i=10}^{11} k_i + \left(m_{10} n_{10} - \sum_{i=10}^{11} m_i \right) g l_{10}, \\
 c_{11,11} &= \sum_{i=11}^{11} k_i + (m_{11} n_{11} - m_{11}) g l_{11}, \\
 c_{12} = c_{21} &= -k_2 + \sum_{i=3}^{11} k_i, \\
 c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} &= -k_3 + \sum_{i=4}^{11} k_i, \\
 c_{14} = c_{41} = c_{24} = c_{42} = c_{34} = c_{43} &= -k_4 + \sum_{i=5}^6 k_i, \\
 c_{15} = c_{51} = c_{25} = c_{52} = c_{35} = c_{53} = c_{45} = c_{54} &= -k_5 + k_6,
 \end{aligned}$$

$$c_{16} = c_{61} = c_{26} = c_{62} = c_{36} = c_{63} = c_{46} = c_{64} = c_{56} = c_{65} = -k_6,$$

$$c_{17} = c_{71} = c_{27} = c_{72} = c_{37} = c_{73} = -k_7 + \sum_{i=8}^{11} k_i,$$

$$c_{18} = c_{81} = c_{28} = c_{82} = c_{38} = c_{83} = c_{78} = c_{87} = -k_8 + k_9,$$

$$c_{19} = c_{91} = c_{29} = c_{92} = c_{39} = c_{93} = c_{79} = c_{97} = c_{89} = c_{98} = -k_9,$$

$$c_{1,10} = c_{10,1} = c_{2,10} = c_{10,2} = c_{3,10} = c_{10,3} = c_{7,10} = c_{10,7} = -k_{10} + k_{11},$$

$$c_{1,11} = c_{11,1} = c_{2,11} = c_{11,2} = c_{3,11} = c_{11,3} = c_{7,11} = c_{11,7} = c_{10,11} = c_{11,10} = -k_{11}.$$

Таким образом, для звеньев, к которым прикрепляются переносные звенья, формулы, предложенные ранее [1], остаются прежними. Приведем их для понимания сути статьи:

$$c_{tt} = \sum_{i=t}^n k_i - gl_t \left(m_t n_t - \sum_{i=t+1}^n m_i \right) \quad (t = 1, \dots, n);$$

$$c_{ts} = c_{st} = -k_s + \sum_{i=s+1}^n k_i \quad (t = 1, \dots, n; s = 1, \dots, n; t \neq s);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^n c_{st} \varphi_t \varphi_s \quad (t = 1, \dots, n; s = 1, \dots, n).$$

Критерий Сильвестра имеет вид:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

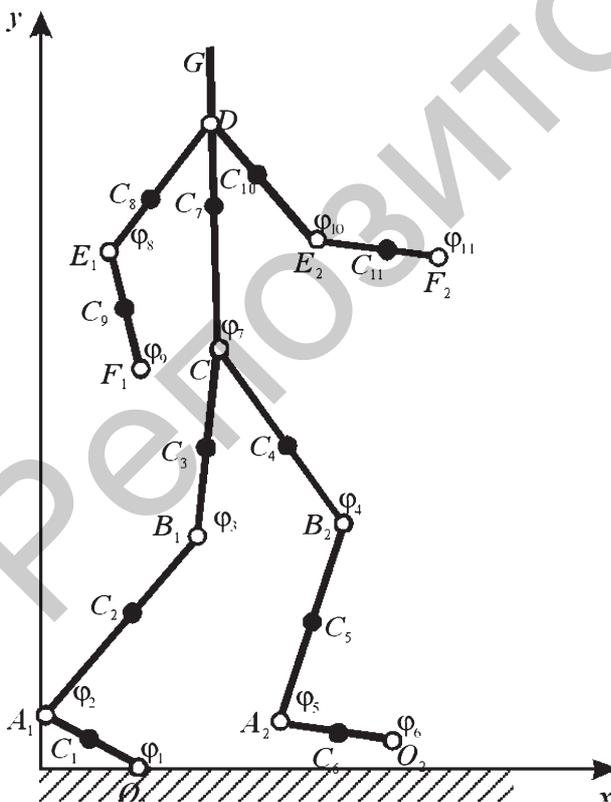


Рисунок 1 — Модель статического равновесия антропоморфной стержневой механической системы с ветвлением в фазе опоры на одну ногу

На рисунке 1 это звенья 1–3, 7 — опорная нога и корпус. Для переносных звеньев, которые находятся после точки ветвления на рисунке 1 — это звенья 4–6, 8–11, т. е. переносная нога и две двухзвенные руки, формулы, предложенные ранее [1], изменяются. Исходя из полученных выражений, с учетом выбранного способа задания положений центров масс (сравним, например формулы для координаты центров масс стоп опорной (x_{c1}, y_{c1}) имеют множитель n_1 при l_1 , а переносной ноги (x_{c6}, y_{c6}) имеют множитель $1 - n_1$ при l_6 ; кроме того, здесь предполагалось, что $1 - n_1 = 1 - n_6$, т. е. положения центров масс отдельных звеньев у переносной и опорной ноги различны), обобщающая формула изменяется для этого случая и имеет вид:

$$c_{tt} = \sum_{i=t}^p k_i + \left(m_t n_t - \sum_{i=t+1}^p m_i \right) gl_t, \quad (t = m, \dots, p);$$

$$c_{ts} = c_{st} = -k_s + \sum_{i=s+1}^p k_i, \quad (t = m, \dots, p; s = m, \dots, p; t \neq s),$$

где m — номер первого переносного звена, с которого начинается ветвление; p — номер, которым заканчивается переносное звено.

Если бы способ задания положений центров масс для переносных звеньев не изменялся, то и формулы оставались бы без изменения.

Вид обобщающих формул остается прежним, за исключением того, что под n нужно понимать сумму звеньев до точки прикрепления к корпусу и одного переносного звена от точки прикрепления. Соответственно, для нескольких переносных звеньев будет несколько различных выражений критерия Сильвестра. Подобным образом можно исследовать произвольные стержневые системы с любым конечным количеством звеньев и точек ветвления.

Подобная двухзвенная модель с вертикальной нагрузкой и сосредоточенными массами на каждом стержне рассмотрена в работе [3]. Однако, устойчивость рассматривается с точки зрения различных случаев распределения масс звеньев, определение зон устойчивости проводится с большими допущениями и упрощениями. Кроме того, полученное решение и метод исследования не могут быть распространены на системы с большим количеством звеньев, в отличие от решения, изложенного здесь.

Проведем численный анализ полученного решения. Построим трехмерные и двумерные области при фиксированных значениях остальных параметров, аналогично тому, как это делалось в работе [1] (рисунки 2 и 3).

Соответствующие сечения в координатах (k_1, k_2, k_3) и (k_1, k_2, k_4) имеют вид, похожий на сечения рисунка 4.11, моделирующего устойчивость аналогичного 11-звенного механизма четырехзвенным механизмом.

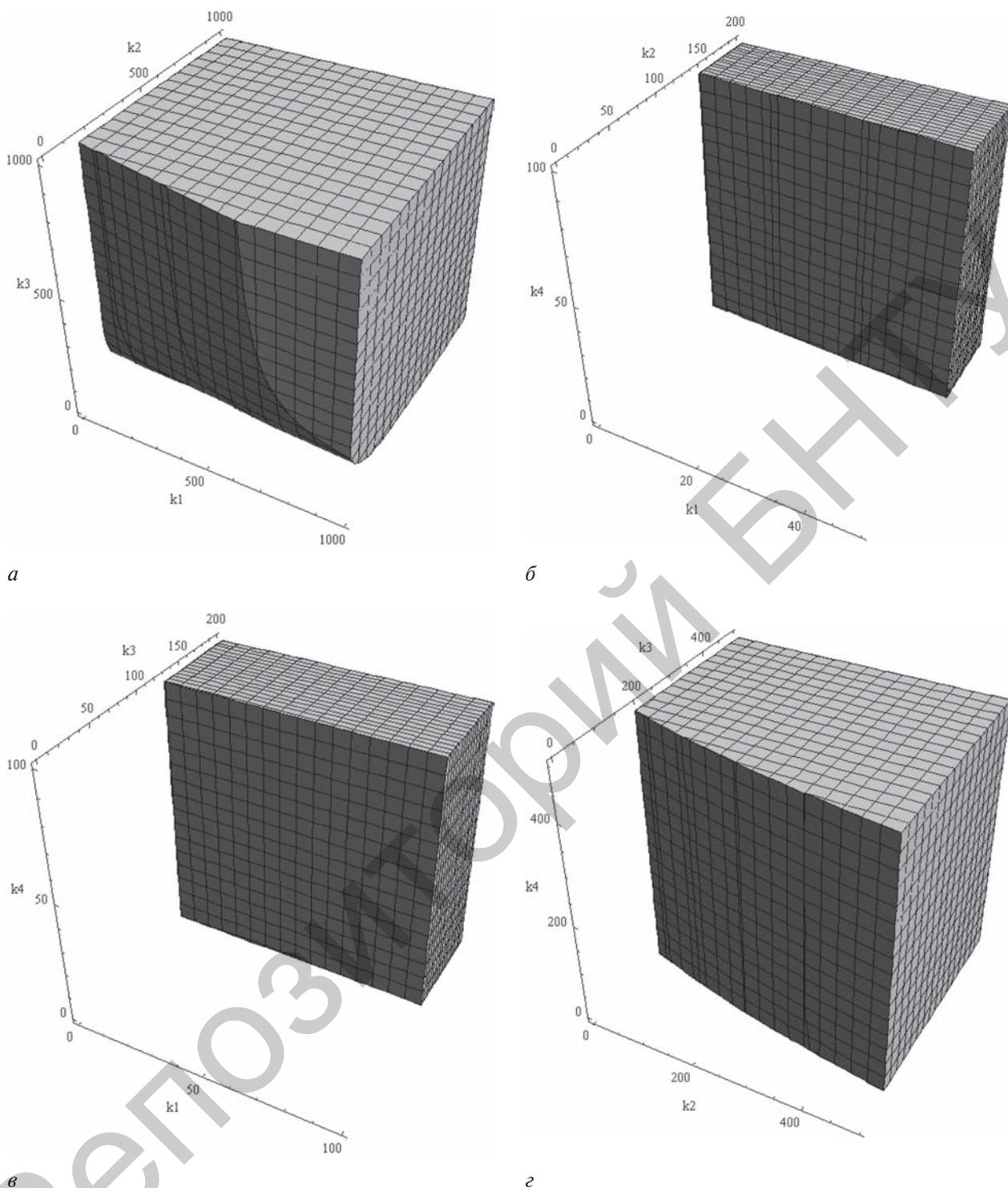


Рисунок 2 — Области устойчивости при одном из фиксированных аргументов:

a — $k_4 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$; *б* — $k_3 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$; *в* — $k_2 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$; *г* — $k_1 = 5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Аналогично можно построить области и при другом наборе фиксированных параметров.

Таким образом, проведены численные оценки, показана применимость предложенного в работе метода для одиннадцатизвенной модели.

Проведенный анализ впервые предложенного обобщения решения показал, что оно устой-

чиво к изменению модели и практически не нуждается в модификации, кроме того, является более общим, в сравнении с предложенными в работах [2, 3].

В практическом плане данная модель позволит определить минимальные значения управляющих воздействий в шарнирах, моделирующих

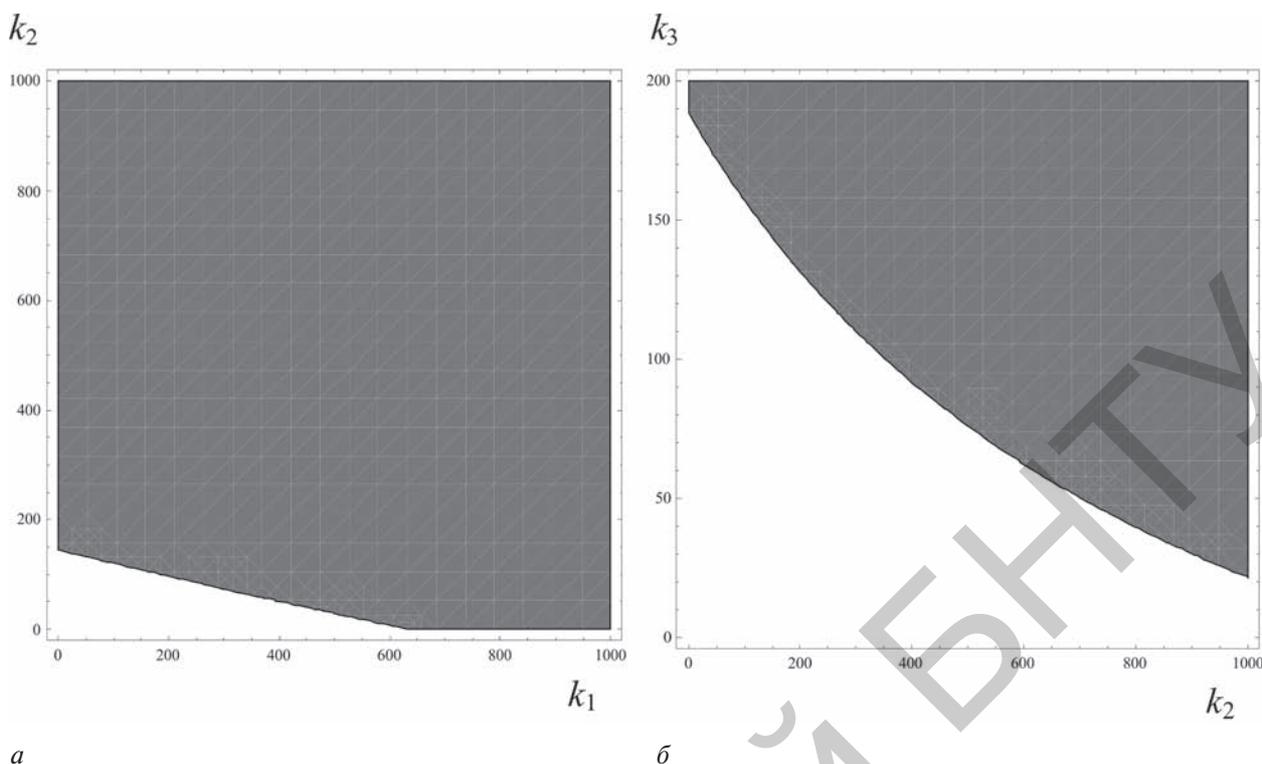


Рисунок 3 — Области устойчивости при двух фиксированных аргументах:

а — $k_3 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_4 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
 б — $k_1 = 5000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_4 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_5 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_6 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_7 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_8 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_9 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{10} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $k_{11} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$

крупные суставы опорно-двигательного аппарата человека, необходимые для поддержания вертикальной статической позы экзоскелета.

Таким образом, впервые проведен анализ статической устойчивости одиннадцатизвенной механической системы с ветвлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 p_центр_a).

Список литературы

1. Чигарев, А.В. Моделирование и определение критериев статической устойчивости эндо- и экзоскелета / А.В. Чигарев, А.В. Борисов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 2(23). — С. 83–88.
2. Меркин, Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
3. Циглер, Г. Основы теории устойчивости конструкций / Г. Циглер. — М.: Мир, 1971.

Chigarev A.V., Borisov A.V.

Static core stability of mechanical systems with branching

The study of static stability of core mechanical system with branching units corresponding to the portable foot and two hands. The concrete example of a model in the form 11-links anthropomorphic system in the phase of support on one leg. The resulting generalization of the solution for the case of systems with an arbitrary number of links. A comparison with the model without branching, highlights the differences and the reasons that caused them. Numerically calculated zone of stability for equilibrium anthropomorphic mechanical model. Modeling of actuators in the joints—the joints is realized in the form of spiral springs. This model can be used in the practical design of anthropomorphic robots and exoskeletons to determine the minimum force that must be applied in the area of large joints-joints mechanism for maintaining the vertical static poses.

Keywords: branching, anthropomorphic rod mechanical system, static stability, the hinge-joints, stiffness of springs, pillar phase, generalization

Поступила в редакцию 17.09.2014.