

Л и т е р а т у р а

1. Караушев А.В. Речная гидравлика. Л., 1969.
2. Морозов Л.А. О коэффициенте кинетической энергии естественных водотоков. -- Гидротехническое строительство, 1964, № 7.
3. Никитина Л.С. О величинах коэффициентов Кориолиса и Буссинеска открытых безнапорных потоков. -- Вест. Моск. ун-та. География, 1973, вып. 4.
4. Железняков Г.В. Теория гидрометрии. Л., 1976.
5. Лившиц И.М., Юркшто-вич Н.А. Рационализация техники приближенного вычисления определенных интегралов по формулам численных квадратур. -- В сб.: Сб. науч. тр. Белорус. политех. ин-та, 1957, вып. 60.
6. Железняков Г.В. Гидрометрия. М., 1972.
7. Быков В.Д., Васильев А.В. Гидрометрия. Л., 1972.
8. Гириллович Н.Я. Гидрометрия. Л.-М., 1937.
9. Павловский Н. Н. Собрание сочинений. Т.1. М.-Л., 1955.
10. Федоров Н.Н. Гидрометрия рек и каналов. Методы измерения расхода воды. Обнинск, 1947.
11. Щапов Н.М. Гидрометрия гидротехнических сооружений и гидромашин. М., 1957.
12. Бочева М.М. Изследване на неравномерността на разпределението на скоростите в напречните сечения на открити речни течения. -- Водни проблеми, 1976, № 4.
13. Kolupaila S. Hidrometrija. T.2. Kaunas, 1939.
14. Štrauss V. Študia ko-řečného factora kinetickej energie a kořečného factora hybnosti prudenja v otvoreých korytách. - Vodohospodársky časopis, 1963, № 1.

УДК 551.482.215

Г.И.Залужный, А.П.Станкевич

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ СПЛАЙНАМ ФУНКЦИИ РАСХОДА И ВЕКТОРА ПЛОЩАДЕЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ОТКРЫТЫХ РУСЕЛ

В случае гладких течений для численного расчета неустановившегося движения воды можно использовать систему уравнений вида [1]:

$$\left. \begin{aligned} B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= q, \\ -\frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} + (c^2 - v^2) B \frac{\partial z}{\partial x} &= \phi, \end{aligned} \right\} (1)$$

где $Q(x, t)$ - объемный расход; x - продольная координата; $z(x, t)$ - ордината свободной поверхности потока; v - скорость потока; $v = Q/A(x, z)$; $A(x, z)$ -- площадь поперечного сечения потока; $B(x, h)$ - ширина поперечного сечения потока; $B = \frac{\partial A}{\partial h}$; h - глубина воды; $h = z(x, t) - z_0(x)$; $z_0(x)$ - ордината дна русла; c - скорость малых возмущений, $c = \sqrt{\frac{gA}{B}}$; g - ускорение силы тяжести; $g(x, t)$ - боковая приточность.

Для Φ , учитывающего турбулентное трение, находим

$$\Phi = \left[BS + \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) h \right] v^2 - \frac{gA}{k^2} Q |Q|,$$

где $S(x)$ -- уклон дна, $S = \frac{\partial z_0}{\partial x}$; k - модуль расхода.

С соответствующими начальными условиями и граничными условиями задача (1) может быть решена методом сеток. Наиболее часто при этом используется набор следующих граничных условий: а) на левой границе $Q(t), z(t)$, б) на правой границе $Q(t)$ или $z(t)$ либо $Q(h)$, которые задаются в табличном виде. В случае использования граничного условия вида $Q(h)$ для решения задачи (1) возникает необходимость определения производной вида $\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=h}$. Эту процедуру удобно выполнять с помощью интерполяционных сплайнов

Другой проблемой, возникающей при решении задачи (1), является построение морфологических и гидравлических характеристик в узлах разностной сетки, не совпадающих со створами, в которых определены эти характеристики. Первая задача определяется как задача численного дифференцирования с помощью сплайнов, вторая сводится к построению интерполяционного сплайна для вычисления значений $A(x, h)$ и $K(x, h)$.

Непрерывность первой и второй производных, а также наличие разрыва с конечным скачком у третьей производной позволяет считать кубические сплайны наиболее эффективным средством в вычислительных алгоритмах для ЭВМ.

Определим интерполяционный кубический сплайн $S_3(x)$ относительно сетки $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ для функции

$f(x)$, имеющей значения $f_k = f(x_k)$ ($k = \overline{0, N}$) в узлах сетки:

1) $S_3(x)$ является кубическим полиномом на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$;

2) $S_3(x) \in C^{(2)}(a, b)$; (2)

3) $S_3(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$.

Граничные условия зададим в виде

$$S_3'''(z-0) = S_3'''(z+0), z = x_1, x_{N-1}. \quad (3)$$

Сплайн (2)...(3) существует, единственен и в конечно-разностной форме может быть записан так [2]:

$$S_3(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2 (x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} - m_i \frac{(x - x_{i-1})^2 (x_i - x)}{(x_i - x_{i-1})^2} + \\ + f_{i-1} \frac{(x_i - x)^2 [2(x - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3} + \\ + f_i \frac{(x - x_{i-1})^2 [2(x_i - x) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3},$$

где

$$m_i = S_3'(x_i), (i = 0, 1, \dots, N); x \in [x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \dots, N); (4) \\ f_1 = f(x_1)$$

с граничными условиями

$$S_3'''(z-0) = S_3'''(z+0). \quad (5)$$

Отметим, что кусочно-линейная интерполяция менее эффективна по сравнению со сплайнами. Функция $S_3(x)$, полученная в результате линейного приближения заданной функции ломанной линией, является решением вариационной задачи с ограничениями:

$$\int_a^b \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx = \min_{W_2(a,b)}, U(x_k) = f_k \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (6)$$

где $W_2^1(a,b)$ — пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом первые обобщенные производные. С другой стороны, интерполяционный кубический сплайн является решением вариационной задачи вида

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 dx = \min_{W_2^2(a,b)} , U(x_k) = f_k \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (7)$$

где $W_2^2(a,b)$ — пространство функций, имеющих суммируемые с квадратом вторые обобщенные производные.

Таким образом, минимизируется интеграл от квадрата вторых производных среди всех остальных интерполирующих функций. Из (7) и (6) видно, что интерполяция кусочно-кубическими функциями дает более высокую точность и является гладкой, так как имеет непрерывные вторые производные.

С помощью изложенного алгоритма (4)...(5) была написана программа на фортране-4 для ЕС ЭВМ. При этом возможности интерполирующего сплайна проверялись на варианте численного дифференцирования функции $Q(h)$ и восстановления вектора площадей в заданных узлах сетки (на примере Вилейско-Минской водной системы на участке от плотины до города Вилейки). На рис. 1 показано поведение функции $Q(h)$

и её производной $\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=h}$. В области возрастания функции

$Q(z)$ растет и производная $\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=h}$. Однако в начальной

точке значения $\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=h}$ становятся, как правило, ниже нуля, что указывает на недостаток информации в этой точке при построении сплайна. Для этого в написанной программе использовалось соотношение вида

$$Q'(x_{i-1}) = \begin{cases} \frac{Q'(x_i) + Q'(x_{i-1})}{2}, & \text{если } |Q'(x_{i-1})| \leq |Q'(x_i)|, \\ \frac{Q'(x_{i+1}) + Q'(x_{i-1})}{m!}, & \text{если } |Q'(x_{i-1})| > |Q'(x_i)|, \end{cases} \quad (8)$$

где $[m] = Q'(x_i) / Q'(x_{i-1})$, $[]$ — целая часть.

Рис. 1. Изменение функции $Q(h)$ и ее производной в области граничных условий на правом конце участка: 1 — функция $Q(h)$; 2 — производная $\left. \frac{dQ}{dz} \right|_{z=h}$.

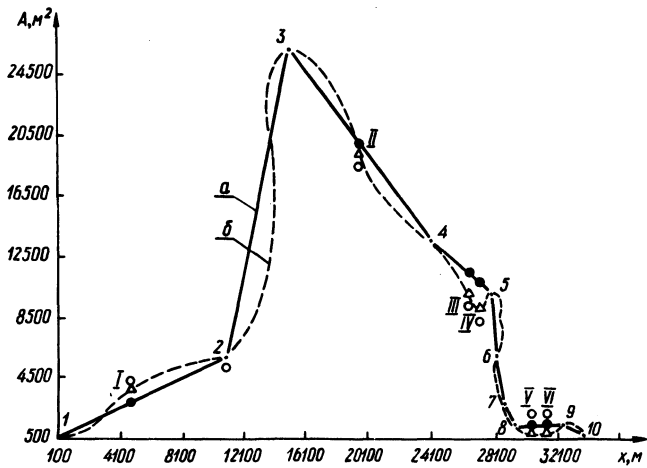
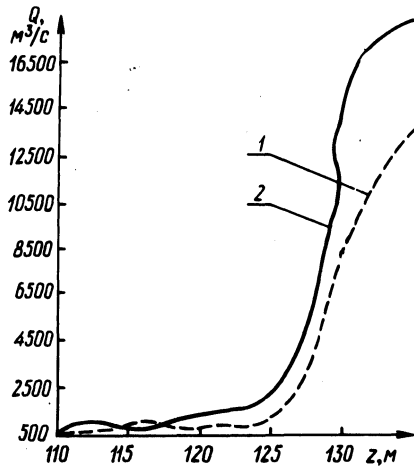


Рис. 2. Сглаживание интерполирующим сплайном вектора площади поперечного сечения русла на участке: а — линейная интерполяция; б — интерполяция кубическим сплайном; 1, ..., 10 — номера характерных створов; I, ..., VI — контрольные точки; O — измеренные площади в контрольных створах; O — значение площади, полученной в контрольных створах по линейной интерполяции; Δ — значение площади, полученной в контрольных створах с помощью сплайна.

Как показали проведенные вычисления, существенной погрешности в значении $\frac{dQ}{dz}$ соотношение (8) не вносит, однако позволяет избежать отрицательных значений в начальной точке.

На рис. 2 показана эффективность использования кубических сплайнов для восстановления вектора площадей в заданных сечениях русла по сравнению с обычной кусочно-линейной интерполяцией. На выбранном участке длиной 34150 м задавалась информация о русле в 16 характерных створах. Для расчета неустановившегося движения на участке необходимо было получить значения функций Q и z в 105 узлах. Из заданных 16 створов 10 использовались для интерполяции, остальные 6 принимались контрольными. Результаты сравнения обоих методов в контрольных створах подтверждают основные выводы работы [3].

Анализ отклонений результатов в контрольных створах показал следующее. В точках 1 и 2 отклонение кривой 2 от измеренных площадей в контрольных створах составило 50% отклонения прямой 1, в точках 3 и 4 это отклонение достигает 75% и лишь в точках 5 и 6 отклонения с заданной точностью совпадают.

Л и т е р а т у р а

1. Алалыкин Г.Б. и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., 1970. 2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 3. Завьялов Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания. — В сб.: Вычислительные системы. Вып. 42. Новосибирск, 1970.

УДК 627.81(476)

П.Д. Гатилло

ВОЗМОЖНОСТИ УВЕЛИЧЕНИЯ ОТДАЧИ ВИЛЕЙСКО-МИНСКОЙ ВОДНОЙ СИСТЕМЫ ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ РЕЗЕРВОВ

Введенная в 1975 г. в строй Вилейско-Минская водная система (ВМВС) выполняет свою роль в водообеспечении г. Минска: это промышленное и хозяйственно-питьевое водоснабжение, водное благоустройство города и пригородной зоны,