МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пособие

Минск
БНТУ
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пособие
для обучающихся по специальности
1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области машиностроительного оборудования и технологий

Минск
БНТУ
2024

УДК 621:539.3/6(075.8)
ББК 34.4я7
Р47

А в т о р ы:
Ю. В. Василевич, В. А. Чигарев,
Л. Н. Беляцкая, М. В. Мышковец

Р е ц е н з е н т ы:
В. Г. Шепелевич, *П. Н. Конон*

Р47 **Теоретическая** механика. Динамика материальной точки : пособие для обучающихся по специальности 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / Ю. В. Василевич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2024. – 46 с.
ISBN 978-985-31-0017-4.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений для их самостоятельного освоения учебного материала и отработки навыков решения задач по теоретической механике и динамике материальной точки.

УДК 621:539.3/6(075.8)
ББК 34.4я7

ISBN 978-985-31-0017-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Движение тела в общем случае зависит не только от его массы и действующих сил, но и от формы тела, т. е. от расположения образующих его частиц (или от распределения масс). С целью отвлечения от формы тела рекомендовано начать изучение динамики с раздела – динамика материальной точки. Материальной точкой называется тело, обладающее массой, размеры которого при постановке задач не учитывают. На практике имеется много задач, в которых динамику движения тела можно описать как динамику движения материальной точки. Например, твердые тела, движущиеся поступательно, относятся к упомянутой категории, поскольку они имеют одинаковые скорость и ускорения для всех точек этих тел.

В данном учебном пособии описаны законы динамики, основные дифференциальные уравнения движения материальной точки, методы решения прямой и обратной задач динамики. Особое внимание обращено при изложении содержания общих теорем динамики и их применении к решению задач. Умелое применение общих теорем является одним из оптимальных вариантов решения задач динамики. Методика решения задач на основе общих теорем отражена на многих примерах, детально изложенных после теоретического материала. Постановки задач взяты из сборника задач по теоретической механике [1]. Определенный научно-методический интерес при изучении динамики материальной точки представляет учебная литература [2–7], приведенная в учебном издании.

1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются движения тел в зависимости от сил, их вызывающих.

Раздел статики посвящен изложению теории и методов решения задач о приведении системы сил к простейшему виду и относительном покое материалов объектов.

В кинематике исследуются задачи о геометрических характеристиках механического движения тел. Отличие динамики от кинематики заключается в том, что при изучении движения учитываются как действующие силы, так и инертность материальных тел.

Как правило, изложение учебного материала при изучении динамики начинается с динамики материальной точки, а затем следует более сложный раздел, посвященный динамике механической системы и твердого тела. С методической точки зрения при изучении главного раздела курса динамики, основанного на знаниях из статики и кинематики, в разделе динамики точки не учитывается форма тела, т. е. взаимное расположение образующих его материальных компонентов или от распределения масс.

Материальной точкой называется тело, обладающее массой, размеры которого при исследовании его движения не учитываются. Имеется и другое определение – материальное тело, вращательными движениями которого, по сравнению с поступательными, можно пренебречь, называется материальной точкой.

Из приведенных определений следует, что под материальной точкой не обязательно понимать тело малых размеров. Тело, совершающее поступательное движение можно рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Если на движение материальной точки не наложено никаких ограничений, то она называется свободной. Если на точку наложены связи, ограничивающие ее движение, то ее называют несвободной.

Инертность характеризует свойство материальных тел изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Тело является более инертным, если изменение его скорости будет меньшим по сравнению с изменением скорости другого тела, при действии на них одной и той же силы.

Характеристикой инертности данного тела является его масса. Масса m в механике принята как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого тела.

2. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Основу динамики составляют законы, подтвержденные практической деятельностью человека. К важнейшим исследованиям развития динамики относятся научные труды Галилея (1564–1642), Ньютона (1643–1727). Систематически эти законы были впервые опубликованы Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем в 1638 г. гласит: изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние. Движение, совершающее точкой при отсутствии сил, называется движением по инерции.

Если сила $F = 0$, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью $V = \text{const}$; ускорение равно $\alpha = 0$.

Если движение точки не является прямолинейным, то на нее действует сила.

Закон инерции выполняется в инерциальной (неподвижной) системе отсчета. При решении технических задач обычно выбирают систему, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает изменение скорости точки, т. е. ускорения, при действии на нее силы. Закон формулируется так: произведение массы m точки на ускорение $\overline{a}$, которое она получает под действием данной силы $\overline{F}$, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

$$m\overline{a} = \overline{F}. \tag{1}$$

Зависимость между модулями силы $\overline{F}$ и ускорения $\overline{a}$ выражается по формуле:

$$ma = F. \tag{2}$$

Сформулированный закон выполняется в инерциальной системе отсчета. При одновременном действии на точку нескольких сил, равнодействующая которых равна геометрической сумме $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$. этих сил, основной закон динамики запишем в виде

$$m\overline{a} = \overline{R} \quad \text{или} \quad m\overline{a} = \sum \overline{F_k}. \tag{3}$$

Согласно закону независимости действия сил, каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщала бы, действуя одна. Таким образом, при одновременном действии нескольких сил ускорение материальной точки равно векторной сумме ускорений, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_n} = \overline{R_n} \,/\, m. \tag{4}$$

где $\overline{a_1} = \overline{F_1} / m, ..., \overline{a_n} = \overline{F_n} / m.$

При определении ускорения можно пользоваться методом суперпозиции (наложения). Необходимо помнить, что при расчете скорости точки аналогичная суперпозиция не допустима, поскольку скорость не равна векторной сумме скоростей, которые имела бы эта точка при действии каждой из сил в отдельности.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает механическое взаимодействие между телами. Закон гласит: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны по одной прямой.

3. ВЕС ТЕЛА И ЕГО МАССА; УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ СИ

На все тела, находящиеся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести P численно равная весу тела. Экспериментально установлено, что под действием силы тяжести при свободном падении на Землю тело имеет ускорение g = 9,8156 м/с^2. Величина g изменяется от географической широты места и высоты тела над уровнем моря. Приведенное численное значение g соответствует широте Москвы (на уровне моря).

Для свободного падения исходя из формулы (2) получаем:

$$P = mg \text{ или } m = P/g, \tag{5}$$

т. е. вес тела равен его массе, умноженной на ускорение силы тяжести, или масса тела равна его весу, деленному на ускорение силы тяжести. Вес тела и ускорение свободного падения изменяются с изменением широты и высоты над уровнем моря; масса является неизменной для данного тела.

В системе единиц СИ единицей длины является метр, единицей массы – килограмм, единицей времени – секунда. Сила является производной единицей, измеряемой в ньютонах (Н).

4. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Под действием приложенных к материальной точке сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, ее ускорение $\overline{a}$ на основе применения главного закона динамики с учетом закона независимости сил определяется уравнением:

$$m\overline{a} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n} \ .$$

В проекциях на оси инерциальных декартовых координат дифференциальные уравнения движения точки записываются в форме:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \tag{6}$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекции ускорения $\overline{a}$;

F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции силы $\overline{F_k}$ на соответствующие оси введенных координат.

В проекциях на оси натурального триэдра дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon_\tau}{\mathrm{d}t} = \sum F_{k\tau}, \quad m\frac{\upsilon^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{k\text{в}}, \tag{7}$$

где υ_τ – проекция скорости на направление касательной к траектории;

υ – модуль скорости;

ρ – радиус кривизны траектории в данной точке;

$F_{k\tau}$, F_{kn}, $F_{kв}$ – проекции силы $\overline{F}_k$ на оси натурального триэдра: $\overline{\tau}$ – касательная, $\overline{n}$ – главная нормаль, $\overline{в}$ – бинормаль.

Из последнего уравнения формул (7) следует, что проекция равнодействующей сил, действующих на материальную точку, на бинормаль равна нулю. Траектория движения точки расположена в соприкасающейся плоскости, поскольку равнодействующая сил находится также в этой плоскости, проведенной в данной точке траектории.

Плоское движение материальной точки в полярных координатах представляется двумя уравнениями:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \sum F_{kr}, \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) = \sum F_{k\varphi}, \tag{8}$$

где r – радиус-вектор точки;

φ – полярный угол.

На основе изложенных дифференциальных уравнений движения материальной точки решают две основные задачи динамики: прямую и обратную.

Прямой называется задача, в которой определяется равнодействующая сил, приложенных к этой точке, по заданному движению и ее массе.

Обратная задача предусматривает определение движения материальной точки под действием заданных сил и ее массе.

4.1. Расчет сил по заданному движению материальной точки (прямая задача динамики)

Пусть уравнения движения материальной точки в декартовых координатах x, y, z заданы уравнениями:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

где t – время,

тогда действующая на точку сила может быть выражена через ее проекции F_x, F_y, F_z и единичные векторы (орты):

$$\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k},$$

$$\overline{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k},$$

и, исходя из основного закона динамики, получим

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z};$$

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2};$$

$\cos(x,\overline{F}) = F_x / F$, $\cos(y,\overline{F}) = F_y / F$, $\cos(z,\overline{F}) = F_z / F$ – углы силы $\overline{F}$ с осями.

Если задано уравнение материальной точки массы m по траектории $\sigma = f(t)$, то проекции F_τ, F_n, F_b силы

$$\overline{F} = F_\tau\bar{\tau} + F_n\bar{n} + F_в\bar{в},$$

вызывающей это движение, рассчитываются по формулам:

$$F_\tau = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_\tau}{\mathrm{d}t}, \quad F_n = m\frac{\upsilon^2}{\rho}, \quad F_b = 0. \tag{9}$$

Следовательно,

$$F = \sqrt{F_\tau{}^2 + F_n{}^2}, \quad \cos = (\bar{\tau},\overline{F}) = F_\tau / F, \quad \cos = (\bar{n},\overline{F}) = F_n / F,$$

$$\cos = (\bar{b},\overline{F}) = 0, \quad V_\tau = \mathrm{d}\sigma / \mathrm{d}t.$$

Задача 1. Груз m массой 0,102 кг, подвешенный на нити длиной 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость υ груза и натяжение T нити, рис. 1.

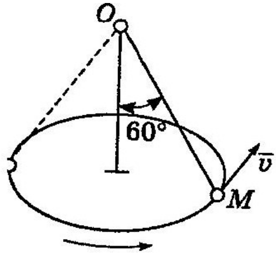

Рис. 1

Решение. Поскольку груз в виде материальной точки совершает криволинейное движение воспользуемся подвижной системой координат $M\tau nb$, рис. 2.

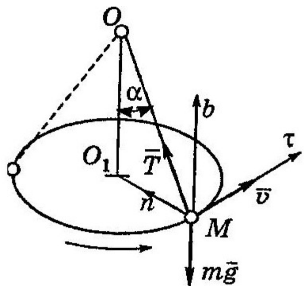

Рис. 2

Изобразим действующие силы на точку: силу тяжести mg и силу натяжения T нити.

Так как $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$, $a_b = 0$, то $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$,

$$m\frac{\upsilon^2}{\rho} = T\sin\alpha, \qquad 0 = T\cos\alpha - mg. \tag{10}$$

Из первой формулы (10) следует, что $\upsilon = \text{const}$.

Из третьей формулы (10) определим натяжение нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0,102 \cdot 9,8}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ Н}.$$

Подставив выражение T и $\rho = l\sin\alpha$ во вторую формулу (10), получим:

$$m\frac{\upsilon^2}{l\sin a} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (11).$$

Из уравнения (11) определяем скорость груза:

$$\upsilon = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}} = \sin 60^\circ\sqrt{\frac{9,8 \cdot 0,3}{\cos 60^\circ}} = 2,1 \text{ м/с}.$$

Ответ: T = 2 Н, $\upsilon = 2,1$ м/с.

Задача 2. Груз массой $m = 600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом (рис. 3). Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворот радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0,4t^3$.

Найти натяжение троса как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.

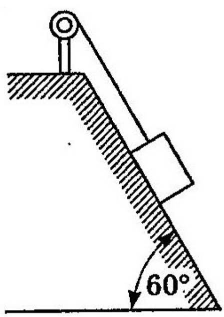

Рис. 3

Решение. Ось x направим в сторону движения груза и изобразим силы, действующие на него: силы тяжести mg и натяжения T троса, реакцию поверхности и силу трения рис. 4.

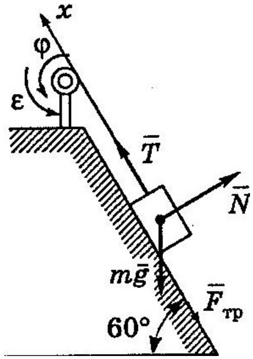

Рис. 4

Запишем дифференциальное уравнение движения груза как материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = T - mg\sin 60^\circ - F_{тр}, \qquad (12)$$

где $F_{тр} = fN = fmq\cos 60^\circ$;

$\ddot{x}$ – ускорение, которое определим по формуле

$$\ddot{x} = R\varepsilon = R\ddot{\varphi} = R(0,4t^3)'' = 0,2 \cdot 2,4t = 0,48t.$$

Силу натяжения троса рассчитаем по формуле (12)

$$T = m\ddot{x} + mg\sin 60^\circ + F_{тр} = 0,48tm + mg\sin 60^\circ + fmg\cos 60^\circ =$$

$$= mg\left(\frac{0,48}{g} + \sin 60^\circ + f\cos 60^\circ\right) = 600 \cdot 9,8\left(\frac{0,48}{9,8}t + 0,866 + 0,2 \cdot 0,5\right) =$$

$$= 288t + 5680 \text{ Н}.$$

Через 2 с после натяжения троса $T = 288 \cdot 2 + 5680 = 6256$ Н.

Ответ: $T = (5,68 + 0,288t)$ кН, при $t = 2$ с, $T = 6,256$ кН.

4.2. Определение движения материальной точки по заданным силам (обратная задача динамики)

Пусть к материальной точке массы m приложены силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Необходимо определить закон движения точки. Для решения поставленной задачи необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений движения в выбранной системе координат.

Если выбрана инерциальная декартовая системы координат, то интегрированию подлежит система дифференциальных уравнений движения точки в виде:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \tag{13}$$

После интегрирования системы определяют закон движения материальной точки:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Так как при интегрировании используются неопределенные интегралы, то для каждого дифференциального уравнения второго порядка в итоговые уравнения интегрирования входят по две произвольные постоянные, всего их шесть – $C_1, C_2, ..., C_6$. Для определения констант интегрирования требуется дополнительно сформулировать начальные условия движения, включающие: положение материальной точки и ее скорость для некоторого фиксированного момента времени. Положение точки определяется тремя координатами:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

а ее скорость – тремя проекциями скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z},$ т. е.

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Задача 3. Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти время T, по истечению которого тело достигнет поверхности Земли. Какую скорость υ оно приобретает за это время? Радиус Земли равен R, ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

Решение. При падении на тело M действует сила притяжения $\overline{F}$. Из точки O_1, находящейся на расстоянии h до поверхности Земли, направим ось x в сторону движения тела, совместив начало координат O с центром Земли, рис. 5.

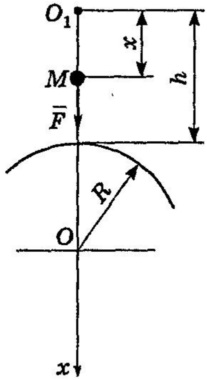

Рис. 5

Согласно условиям задачи дифференциальное уравнение движения тела M запишем в виде:

$$m\ddot{x} = \frac{k}{(R+h-x)^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности, определяемый из условия равенства силы тяжести материальной точки и силы тяготения на поверхности Земли, т. е. $k/R^2 = mg$, откуда $k = mgR^2$.

Тогда

$$\ddot{x} = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2}.$$

Введем замену: $\ddot{x} = \dfrac{\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}$, разделим переменные, проинтегрируем и получим:

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2},$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{(R+h-x)} + C_1.$$

Из начальных условий: при $x = 0$, $\dot{x} = 0$ определим произвольную константу интегрирования $C_1 = -\dfrac{gR^2}{R+h}$.

Тогда

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+h-x} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{gR^2 x}{(R+h-x)(R+h)}.$$

Из полученного равенства найдем скорость

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{x}{R+h-x}}. \qquad (14)$$

При $x = h$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{h}{R+h-h}} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

Для нахождения времени падения разделим переменные в (14)

$$\sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\mathrm{d}t.$$

Интегрируя полученное выражение получим

$$\int \sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{R+h-x}\sqrt{R+h-x}}{\sqrt{x}\sqrt{R+h-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{(R+h-x)\mathrm{d}x}{\sqrt{(R+h)x-x^2}} =$$

$$= \int \frac{\left[2(R+h)-2x\right]\mathrm{d}x}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}} = \int \frac{(R+h-2x)\mathrm{d}x}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}} + \int \frac{(R+h)\mathrm{d}x}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}. \quad (15)$$

Введем новую переменную $\sqrt{(R+h)x-x^2} = u,$ тогда

$$\mathrm{d}u = \frac{(R+h-2x)\mathrm{d}x}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}.$$

$$\int \mathrm{d}u = \int \frac{(R+h-2x)\mathrm{d}x}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}} = \sqrt{(R+h)x-x^2}.$$

Последний интеграл в выражении (15) можно представить в виде

$$\frac{R+h}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(R+h)x-x^2}}$$ – это табличный интеграл,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}, \text{ где } a = \frac{R+h}{2}.$$

Следовательно, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(R+h)x-x^2}} = \arcsin\frac{x-\frac{R+h}{2}}{(R+h)/2}.$

$$\int \sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{(R+h)x-x^2} + \frac{R+h}{2}\arcsin\frac{x-\frac{R+h}{2}}{\frac{R+h}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}t + C_2. \quad (16)$$

Произвольную постоянную C_2 интегрирования найдем из начальных условий: при $t=0,\ x_0=0$.

Из уравнения (16) получим

$$C_2 = \frac{R+h}{2}\arcsin(-1) = \frac{R+h}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Подставим C_2 в (16) и определим величину искомого времени

$$t=\sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}\left\{\sqrt{(R+h)x-x^2}+\frac{R+h}{2}\left[\arcsin\frac{x-\frac{R+h}{2}}{\frac{R+h}{2}}+\frac{\pi}{2}\right]\right\}}.$$

Преобразуем полученное уравнение для T исходя из следующих формул:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\qquad \arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

Тогда

$$\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}=\frac{\pi}{2}+\arcsin\left[-\frac{-x+\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\left(\frac{R+h}{2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left[\frac{-x+\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\left(\frac{R+h}{2}\right)}\right]=\arccos\frac{R+h-2x}{R+h}$$

и
$$t=\sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left[\sqrt{(R+h)x-x^2}+\frac{R+h}{2}\arccos\frac{R+h-2x}{R+h}\right],$$

при $x = h$ имеем

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

Ответ: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2ghR}{R+h}}$; $T = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \dfrac{R+h}{2}\arccos\dfrac{R-h}{R+h}\right).$

4.3. Криволинейное движение свободной материальной точки в инерциальной системе декартовых координат

Пусть свободная точка совершает движение относительно неподвижной декартовой системе координат $Oxyz$ под действием сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Основной закон динамики в проекциях на оси координат запишем в виде

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_{kz}. \qquad (17)$$

На основании уравнений (17) может быть решена как первая, так и вторая (основная) задача динамики.

При решении основной задачи необходимо задать начальные условия при $t = 0$.

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{x0}, \quad \upsilon_y = \upsilon_{y0}, \quad \upsilon_z = \upsilon_{z0}. \qquad (18)$$

Зная действующие на точку силы, из уравнений (17) путем их интегрирования найдем закон ее движения, т. е. зависимость координат x, y, z от времени t.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad y = y(t). \qquad (19)$$

В уравнения (19) войдут шесть постоянных интегрирования

$$C_1, C_2, ..., C_6,$$

определяемых с учетом начальных условий (18).

Криволинейное движение материальной точки может быть определено и в проекциях других систем координат.

Отметим, что в уравнениях (17) величины проекций действующих сил на точку могут быть зависимы от времени, положения точки и от ее проекций скорости $\mathrm{d}x / \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y / \mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z / \mathrm{d}t$ на оси координат.

4.4. Уравнения движения точки по заданной неподвижной кривой

Предположим, что точка совершает движение по неподвижной гладкой кривой под действием сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$. Начало отсчета движения определим в точке O, рис. 6, а ее положение на траектории криволинейной координатой $S = \breve{O}M$.

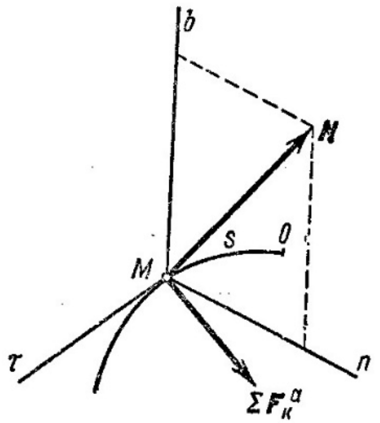

Рис. 6

Обозначим реакцию связи $\overline{N}$. В векторной форме основной закон динамики запишем в виде:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k + \overline{N}. \tag{20}$$

Спроектируем уравнение (20) на оси естественного трехгранника $M\tau nb$

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \quad ma_n = \sum F_{kn} + N_n, \quad ma_b = \sum F_{kb} + N_b.$$

Поскольку траектория является гладкой, то вектор $\overline{N}$ перпендикулярен ей и находится в соприкасающейся плоскости $M\tau n,$ следовательно, $\overline{N}_\tau = 0.$

Воспользуемся формулами:

$a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2},$ $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho},$ $a_b = 0$ (вследствие того, что ускорение $\overline{a}$ также находится в соприкасающейся плоскости) запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки по неподвижной кривой:

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \sum F_{k\tau} \quad \text{или} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_{k\tau}, \tag{21}$$

$$\frac{m\upsilon^2}{\rho} = \sum F_{kn} + N_n, \quad \sum F_{kb} + N_b = 0. \tag{22}$$

На основании формул (21), (22) можно решать как первую, так и вторую (основную) задачи динамики.

Если кривая не является гладкой, то к силам $\overline{F}_k$ необходимо добавить силу трения $\overline{F}_{\text{тр}}.$

Полученными уравнениями можно воспользоваться и при движении свободной материальной точки, положив $N = 0.$

Задача 4. Самолет летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с. На каком расстоянии $x,$ измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки $B,$ должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь, рис. 7.

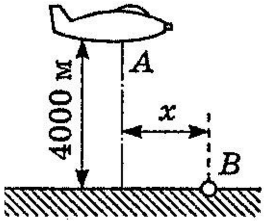

Рис. 7

Решение. В системе координат Oxy изобразим точку A, в которой осуществлен сброс груза с самолета, рис. 8.

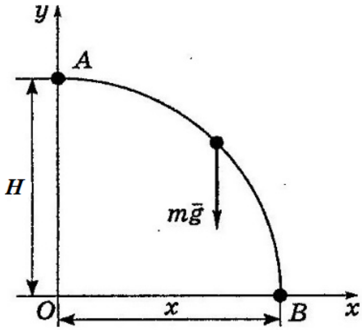

Рис. 8

В произвольной точке траектории груза указана его сила тяжести mg.

В выбранной системе координат запишем основной закон динамики движения груза.

$$m\ddot{x} = 0, \tag{23}$$

$$m\ddot{y} = -mg. \tag{24}$$

Проинтегрировав уравнение (23), получим

$$\dot{x} = C_1. \tag{25}$$

где C_1 – произвольная константа.

Представим $\dot{x}$ в виде $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; подставив данное выражение в формулу (25), затем разделив переменные и проинтегрировав полученное уравнение в итоге получим

$$\int \mathrm{d}x = \int C_1 \mathrm{d}t, \qquad x = C_1 t + C_2. \tag{26}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем на основании заданных начальных условий и формул (25), (26).
при $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 140$ м/с; $\dot{x}_0 = 140$, $\dot{x}_0 = 0 = C_2$.

После выполненных преобразований уравнения (25), (26) запишем в виде

$$\dot{x} = 140, \tag{27}$$

$$x = 140t. \tag{28}$$

Аналогичные рассуждения применим к уравнению (24). Сделаем замену $\ddot{y} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}$, разделим переменные и проинтегрируем

$$\int \mathrm{d}\dot{y} = \int -g\mathrm{d}t, \qquad \dot{y} = -gt + C_3. \tag{29}$$

Для того чтобы найти закон движения точки в проекции на ось y опять сделаем замену $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, разделим переменные и выполним интегрирование полученного уравнения

$$\int \mathrm{d}y = \int (-gt + C_3)\mathrm{d}t, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{30}$$

Из начальных условий: при $t = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $y_0 = H = 4000$ м; и уравнений (29), (30) получим формулы для определения скорости $\dot{y}$ и закона движения точки по оси y

$$\dot{y} = -gt, \qquad (31)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + H. \qquad (32)$$

Из формулы (32) при $y = 0$ определим время t_1 падения груза в точку B

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

С учетом найденного времени t_1 из уравнения (28) определим искомое расстояние по горизонтали между точками O и B.

$$x = 140\sqrt{\frac{2H}{g}} = 140\sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9,8}} = 4000 м\,.$$

Ответ: $x = 4000$ м.

Задача 5. Тело весом P, брошенное с начальной скоростью υ_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления R воздуха. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости $R = kP\upsilon$.

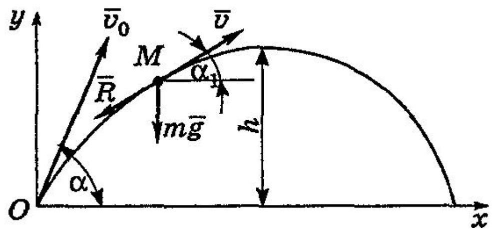

Рис. 9

Решение. Изобразим на рис. 9 в системе координат Oxy силы тяжести $m\bar{g}$ и сопротивления $\bar{R}$, действующие на точку M в некоторый произвольный момент времени ее движения. Запишем в проекции на ось Oy основной закон динамики

$$m\ddot{y} = -mg - R\sin\alpha_1, \tag{33}$$

где $\sin\alpha_1 = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon}$, $R = kmg\upsilon$.

Преобразуем уравнение (33) к виду

$$\ddot{y} = -g(1 + k\upsilon_y). \tag{34}$$

Выполним замену

$$\dot{y} = \upsilon_y[y(t)], \text{ тогда } \ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \upsilon_y\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}y},$$

на основании которой разделим переменные, формулу (34) преобразуем к форме

$$\frac{\upsilon_y \mathrm{d}\upsilon_y}{1 + k\upsilon_y} = -g\mathrm{d}y, \quad \frac{1}{k}\cdot\frac{1 + k\upsilon_y}{1 + k\upsilon_y}\mathrm{d}\upsilon - \frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{1 + k\upsilon_y} = -g\mathrm{d}y$$

или

$$\frac{1}{k}\int\limits_{\upsilon_0 \sin\alpha}^{0}\mathrm{d}\upsilon_y - \frac{1}{k^2}\int\limits_{\upsilon_0 \sin\alpha}^{0}\frac{\mathrm{d}(1 + k\upsilon_y)}{1 + k\upsilon_y} = -g\int\limits_{0}^{h}\mathrm{d}y. \tag{35}$$

Учитывая, что при достижении наибольшей высоты $\upsilon_y = 0$, имеем

$$\frac{1}{k}\upsilon_y\Big|_{\upsilon_0 \sin\alpha}^{0} - \frac{1}{k^2}\ln(1 + k\upsilon_y)\Big|_{\upsilon_0 \sin\alpha}^{0} = -gy\Big|_0^h.$$

После подстановки верхних и нижних пределов получим

$$-\frac{1}{k}\upsilon_0\sin\alpha + \frac{1}{k^2}\ln(1 + k\upsilon_0\sin\alpha) = -gh.$$

Из полученного равенства определим наибольшую высоту

$$h = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}\ln(1 + k\upsilon_0 \sin\alpha).$$

Ответ: $h = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{gk} - \dfrac{1}{gk^2}\ln(1 + k\upsilon_0 \sin\alpha).$

5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Общие теоремы динамики точки являются эффективными методическими пособиями по решению задач динамики. Общие теоремы получены на основе закона динамики. Эффективность их применения при решении многих задач заключается в избавлении необходимости интегрирования дифференциальных уравнений, поскольку эти математические операции были выполнены при выводе общих теорем. Достоинство общих теорем заключается в том, что они дают возможность исследовать отдельные важные стороны явлений, не прибегая к изучению их в целом, что способствует упрощению решения задач.

Количество движения точки и кинетическая энергия являются основными характеристиками при движении точки.

Количеством движения точки называется векторная величина $m\overline{\upsilon}$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Вектор $m\overline{\upsilon}$ направлен по касательной к траектории по направлению скорости $\overline{\upsilon}$, размерность его кг·м/с.

Кинетической энергией точки называется скалярная величина $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости; размерность этой величины кг·м^2/с^2. [2].

Для того чтобы оценить действие силы на тело в течение некоторого промежутка времени, введено понятие об импульсе силы.

Элементарным импульсом силы $\overline{F}$, действующей на точку в течение элементарного времени $\mathrm{d}t$, называется векторная величина $\mathrm{d}\overline{S}$, определяемая по формуле $\mathrm{d}\overline{S} = \overline{F}\mathrm{d}t$.

Единицей измерения импульса в системе СИ является Н · с.

При действии силы $\overline{F}$ на тело в течение конечного промежутка времени t_1 импульс $\overline{S}$ рассчитывается по формуле

$$\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F}\mathrm{d}t, \tag{36}$$

т. е. импульс $\overline{S}$ равен определенному интегралу от элементарного импульса в пределах интегрирования от 0 до t_1.

Проекции вектора $\overline{S}$ на оси координат $Oxyz$ запишем в виде

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x\mathrm{d}t, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y\mathrm{d}t, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z\mathrm{d}t. \tag{37}$$

Интегралы, формирующиеся в формулах (37), можно вычислить, если силы зависят от времени или являются постоянными.

5.1. Теорема об изменении количества движения точки

Поскольку масса m точки постоянна, а ее ускорение $\overline{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overline{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$, то основной закон динамики запишем в виде

$$\frac{\mathrm{d}(m\overline{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \sum \overline{F}_k. \tag{38}$$

Формула (38) представляет запись теоремы об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: производная по времени t от количества движения точки $m\overline{\upsilon}$ равна геометрической сумме действующих на точку сил.

Умножив обе части уравнения (38) на $\mathrm{d}t$, проинтегрируем полученное уравнение в пределах: левую часть от $\overline{\upsilon}_0$ до $\overline{\upsilon}_1$, где $\overline{\upsilon}_0$ и $\overline{\upsilon}_1$ – скорость точки соответственно при $t = 0$ и $t = t_1$; правую в пределах от нуля до t_1; в итоге получим

$$m\bar{\upsilon}_1 - m\bar{\upsilon}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k \mathrm{d}t. \qquad (39)$$

Так как правая часть (39) представляет выражение, описывающее импульсы действующих сил, то

$$m\bar{\upsilon}_1 - m\bar{\upsilon}_0 = \sum \bar{S}_k. \qquad (40)$$

Формула (40) в векторном виде описывает теорему об изменении количества движения точки: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени [2].

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение (40) запишем в виде

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx}, \qquad (41)$$

$$m\upsilon_{1y} - m\upsilon_{0y} = \sum S_{ky},$$

$$m\upsilon_{1z} - m\upsilon_{0z} = \sum S_{kz}.$$

Задача 6. Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

Решение. В декартовой системе координат Oxy изобразим движущийся поезд как материальную точку, в которой сосредоточен вес поезда mg, рис. 10.

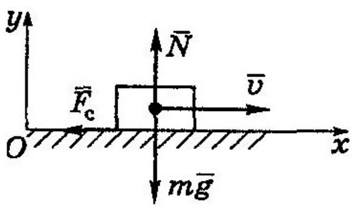

Рис. 10

Укажем действующие на нее силы: $\bar{N}$ – нормальная реакция, $\bar{F}_{\text{с}}$ – сила сопротивления; ось x направить в сторону движения поезда. Запишем первое уравнение (41)

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = \sum S_{kx} = -F_{\text{с}} \cdot t. \tag{42}$$

и начальные условия: при $t = 0$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 = 20$ м/с, $\upsilon_{1x} = \dot{x}$. Равенство (42) преобразуем к виду

$$\dot{x} - \upsilon_0 = -\frac{F_{\text{с}}}{m}t = -\frac{0,1mgt}{m} = -0,1gt, \tag{43}$$

из которого получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \upsilon_0 - 0,1gt.$$

Проинтегрировав его найдем общее решение в виде

$$x = \upsilon_0 t - 0,1g\frac{t^2}{2} + C,$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Исходя из начальных условий: при $t = 0$, $x_0 = 0$ определим $C = 0$.

Частное решение дифференциального уравнения, описывающее закон определяемого движения поезда, имеет вид

$$x = \upsilon_0 t - 0,1g\frac{t^2}{2}. \tag{44}$$

Обозначим T – искомое время торможения. При $t = T$, $\dot{x} = 0$ и из формулы (44) получим $0 = \upsilon_0 - 0,1gT$, откуда

$$T = \frac{\upsilon_0}{0,1g} = \frac{20}{0,1 \cdot 9,8} = 20,4 \text{ с}.$$

Тормозной путь L определим из формулы (44) при $t = T = 20,4$ с

$$L = T(\upsilon_0 - 0,1g\frac{T}{2}) = 20,4(20 - 0,1 \cdot 9,8 \cdot \frac{20,4}{2}) = 204 \text{ м}.$$

Ответ: $L = 204$ м, $T = 20,4$ с.

Задача 7. Найти импульс равнодействующих сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M. Дано: $\upsilon_0 = 500$ м/с, $\alpha_0 = 60^\circ$, $\upsilon_1 = 200$ м/с, масса снаряда 100 кг, рис. 11.

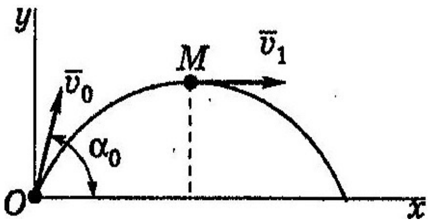

Рис. 11

Решение. Воспользуемся первым и вторым уравнениями соотношений (41)

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = S_x,$$

$$m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{0y} = S_y.$$

По условию задачи:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1, \quad \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos 60^\circ,$$

$$\upsilon_{1y} = 0, \quad \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin 60^\circ.$$

Подставим эти соотношения в предыдущие уравнения, преобразованные из формулы (41), получим

$$S_x = m(\upsilon_1 - \upsilon_0 \cos 60^\circ) = 100(200 - 500 \cdot 0{,}5) = -5000 \text{ Н} \cdot \text{с},$$

$$S_y = -m\upsilon_{0y} = -m\upsilon_0 \sin 60^\circ = -100 \cdot 500 \frac{\sqrt{3}}{2} = -43\,300 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ответ: проекции импульса равнодействующей $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$; по осям координат x и y они равны $S_x = -5000 \text{ Н} \cdot \text{с}$, $S_y = -43\,300 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

5.2. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки (теорема моментов)

Решения многих задач основываются не на изменении вектора $m\bar{\upsilon}$, а на изменении его момента. Момент вектора $m\bar{\upsilon}$ относительного данного центра O или оси z обозначается $\bar{m}_O(m\bar{\upsilon})$ или $m_z(m\bar{\upsilon})$ и называется соответственно моментом количества движения или кинетическим моментом точки относительно этого центра (оси).

Вычисляется момент вектора $m\bar{\upsilon}$ так же, как и момент силы, приложенной к движущейся точке. По модулю $\left|\bar{m}_O\left(m\bar{\upsilon}\right)\right| = m\upsilon h,$ где h – длина перпендикуляра, опущенного из центра O на направление вектора $m\bar{\upsilon}[2]$, рис. 12.

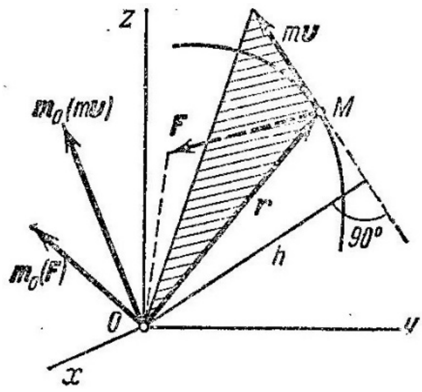

Рис. 12

Теорема моментов относительно оси гласит: производная по времени от момента количества движения точки относительно какой-нибудь оси равна моменту действующей силы относительно той же оси

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m_z(m\overline{\upsilon})\right] = m_z\left(\overline{F}\right). \tag{45}$$

По аналогии сформулируем теорему моментов относительно произвольного центра O: производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\overline{m}_O(m\overline{\upsilon})\right] = \overline{m}_O\left(\overline{F}\right). \tag{46}$$

Если $\overline{m}_O\left(\overline{F}\right) = 0,$ то $\overline{m}_O\left(m\overline{\upsilon}\right) = \mathrm{const}.$ Данный результат используется на практике при решении задач, в которых движение материальной точки осуществляется под действием центральной силы (центральной называется сила, линия действия которой проходит все время через данный центр O).

Задача 8. Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, средняя плотность 5,5 т/м^3, большая полуось земной орбиты $a = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м, время обращения Земли вокруг Солнца T = 365,25 суток. Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 кг, на расстоянии 1 м считать равной $\frac{gR^2}{m}H$, где m – масса Земли; из закона Кеплера следует, что сила притяжения Земли с Солнцем равна $\frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 r^2}$, где r – расстояние Земли от Солнца, рис. 13.

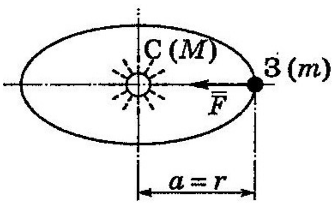

Рис. 13

Решение. Учитывая, что по условию задачи $a = r$, из закона Кеплера имеем $F = \dfrac{4\pi^2 am}{T^2}$, где $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – масса Земли, ρ – средняя плотность.

На основании закона Ньютона, сила притяжения между Солнцем и Землей определяется по формуле $F = \dfrac{R^2 g}{m} \cdot \dfrac{Mm}{a^2}$.

Приравнивая правые части полученных уравнений, получим

$$ma\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{R^2 g}{m} \cdot \frac{Mm}{a^2},$$

откуда найдем массу Солнца

$$M = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 R^2 g} = \frac{16\pi^3 a^3 R\rho}{3T^2 g} =$$

$$= \frac{16 \cdot 3{,}14^3 (1{,}49 \cdot 10^{11}) \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10^3}{3(365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 9{,}8} = 1{,}966 \cdot 10^{30}.$$

Ответ: $M = 1{,}966 \cdot 10^{30}$ кг.

Задача 9. Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения $\bar{F}$ к этому центру. Найти скорость υ_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $\upsilon_1 = 30$ м/с, а r_2 в пять раз больше r_1, рис. 14а.

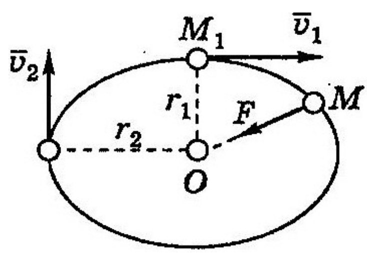

Рис. 14а

Решение. На рис. 14б изображена точка M_1 и в самом дальнем положении – в точке M_2. На основании формулы (46) запишем теорему об изменении количества движения точки относительно центра O.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{m}_O(m\bar{\upsilon})\right]=\bar{m}_O\left(\bar{F}\right)=0.$$

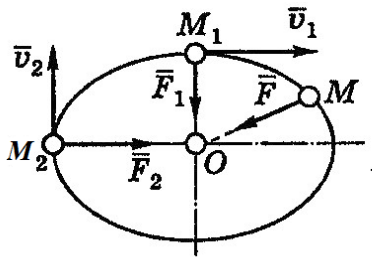

Рис. 14б

Откуда следует, что $\bar{m}_O\left(m\bar{\upsilon}\right)=\text{const}$, тогда $\bar{m}_{O1}\left(m\bar{\upsilon}\right)=\bar{m}_{O2}\left(m\bar{\upsilon}\right)$, $m_{O1}\left(m\upsilon\right)=m\upsilon_1 r_1$, $m_{O2}\left(m\upsilon\right)=m\upsilon_2 r_2$, и $\upsilon_1 r_1=\upsilon_2 r_2=\upsilon_2 r_1$.

Скорость в положении M_2 равна:

$$\upsilon_2=\frac{\upsilon_1 r_1}{5r_1}=\frac{30}{5}=6 \text{ см/с}.$$

Ответ: $\upsilon_2=6$ м/с.

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении из начальной точки M_0 в конечную M_1, под действием приложенных сил, определяется на основании основного закона Ньютона. Пусть материальная точка массой m в начале движения имеет скорость $\bar{\upsilon}_0$, а ее скорость в конечной точке M_0 равна $\bar{\upsilon}_1$.

В проекции на касательную τ к траектории в направлении движения точки основной закон динамики запишем в виде

$$ma_{\tau} = \sum F_{k\tau}.$$

Так как $a_{\tau} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}s} \cdot \upsilon,$ то

$$m\upsilon \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}s} = \sum F_{k\tau}.$$

Умножим обе части уравнения на $\mathrm{d}s$, а массу m внесем под знак дифференциала; правая часть полученного уравнения будет представлять выражение $F_{k\tau} \cdot \mathrm{d}s = \mathrm{d}A_k$ по расчету элементарной работы силой $F_{k\tau}$. В итоге получим дифференциальное уравнение, описывающее теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме:

$$\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum \mathrm{d}A_k. \tag{47}$$

Формулу (47) преобразуем к другому виду путем интегрирования обеих частей уравнения в пределах изменения переменных в точках M_0 и M_1.

$$\frac{m\upsilon_1^{\,2}}{2} - \frac{m\upsilon_0^{\,2}}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}. \tag{48}$$

Таким образом, изменения кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Задача 10. При подходе к станции поезд идет со скоростью 10 м/с под уклон, угол которого $\alpha = 0{,}008$ рад. В некоторый момент машинист начинает тормозить поезд. Сопротивление от трения в осях составляет 0,1 от веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через какое время от начала торможения поезд остановится. Принять, что $\sin\alpha = \alpha$.

Решение. Схему расчета изобразим на рис. 15, где $\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, $m\bar{g}$ – вес поезда, $\bar{N}$ – реакция связи.

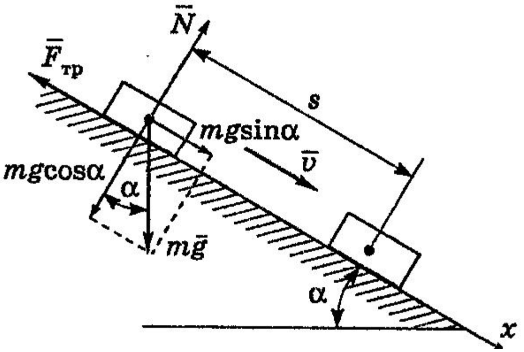

Рис. 15

Считая, что поезд совершает поступательное движение, его можно принять за материальную точку. Применим теорему об изменении количества движения, записав ее проекции на ось x:

$$m\upsilon_{1x} - m\upsilon_{0x} = \int_0^{t_1} F_x \mathrm{d}t$$

или

$$m\upsilon_1 - m\upsilon_0 = \int_0^{t_1} (mg\sin\alpha - F_{\text{тр}})\mathrm{d}t.$$

По условию задачи $\upsilon_1 = 0$, а $F_{\text{тр}} = 0{,}1mg$, полученные уравнения преобразуем к виду

$$-\upsilon_0 = g(\sin\alpha - 0{,}1)t_1.$$

Так как $\sin\alpha = \alpha,$ то

$$t_1 = \frac{\upsilon_0}{g(0,1-0,008)} = \frac{10^2}{9,8(0,1-0,008)} = 11,08 \text{ с.}$$

Для определения пройденного поездом расстояния S до остановки воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k), \text{ здесь } \upsilon_1 = 0,$$

$$\sum A(\overline{F}_k) = mgS\sin\alpha - F_{\text{тр}}S = mgS\sin\alpha - 0,1mgS = mgS(\alpha - 0,1).$$

Формулу для расчета изменения кинетической энергии запишем в форме

$$-\frac{\upsilon_0^2}{2} = gS(\alpha - 0,1),$$

откуда

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{2g(0,1-\alpha)} = \frac{10^2}{2\cdot 9,8\cdot(0,1-0,008)} = 55,3 \text{ м.}$$

Ответ: 55,3 м.

Задача 11. Груз массой 1 кг подвешен на нити длиной 0,5 м в неподвижной точке O. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость υ_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 2,1 м/с. Определить натяжение нити в наилучшем положении и отсчитываемому по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

Решение. На рис. 16 изобразим точку в наинизшем положении, указав действующие на нее силы.

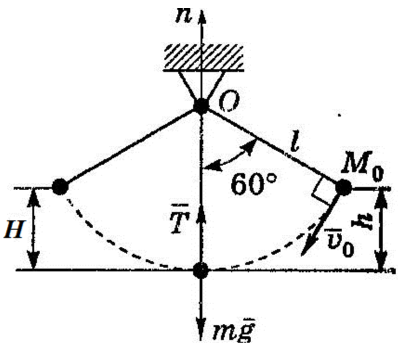

Рис. 16

По основному закону динамики для несвободной точки

$$m\bar{\alpha} = \sum \bar{F}_k + \bar{N},$$

где $\bar{\alpha}$ – ускорение;

$\bar{F}_k$ – действующие силы;

$\bar{N}$ – натяжение нити, т. е. $N = T$.

Запишем упомянутый закон в проекции на главную нормаль n

$$\frac{m\upsilon^2}{l} = -mg + T.$$

Из данного уравнения имеем

$$T = \frac{m\upsilon^2}{l} + mg.$$

Квадрат скорости определим на основе применения теоремы об изменении кинетической энергии

$$\frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgh,$$

где $h = l - l\cos 60^\circ = 0,5l$;

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2gh = \upsilon_0^2 + gl.$$

Подставив υ^2 в выражение для T, получим

$$T = \frac{m}{l}(\upsilon_0^2 + gl) + mg = \frac{m\upsilon_0^2}{l} + 2mg = \frac{2,1^2}{0,5} + 29,8 = 28,4 \text{ Н}.$$

Отсчитываемую по вертикали высоту H найдем, учитывая, что кинетическая энергия в верхнем положении груза равна нулю, т. е. $T_1 = 0$, тогда

$$T_1 - T_0 = -mgH,$$

$$T_0 = \frac{m(\upsilon_0^2 + gl)}{2},$$

$$\text{и } H = \frac{\upsilon_0^2 + ql}{2q} = \frac{(2,1)^2 + 9,8 \cdot 0,5}{2 \cdot 9,8} = 0,475 \text{ м}.$$

Ответ: 28,4 Н; 47,5 см.

6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Законы динамики описывают движение материальной точки в инерциальной (неподвижной) системе координат

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k, \tag{49}$$

где m – масса;

$\bar{a}$ – ускорение точки;

$\bar{F}_k$ – силы, действующие на точку.

Инженерной практикой часто востребовано изучение движения материальной точки относительно подвижной системы координат, которое называется относительным движением.

Поскольку абсолютное ускорение точки при сложном движении рассчитывается с использованием теоремы Кориолиса

$$\overline{a} = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c,$$

где $\overline{a}_r$, $\overline{a}_e$, $\overline{a}_c$ – ускорение соответственно относительное, переносное и Кориолиса, то в правую часть (49) введены дополнительные силы, называемые инерционными силами.

Второй закон динамики в подвижной системе координат приобретает вид

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c, \tag{50}$$

где $\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e$ – переносная сила инерции;

$\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c = -2m(\overline{\omega}_e \times \overline{\upsilon}_r)$ – сила инерции Кориолиса по модулю $\varphi_c = 2m\omega_e\upsilon_r \sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{\upsilon}_r})$.

Уравнение (50) описывает основной закон динамики для относительного движения материальной точки.

Если движение точки является поступательным, то сила инерции Кориолиса равна нулю и уравнение (50) принимает вид

$$m\overline{a}_r = \sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e.$$

В проекциях на оси Oxy декартовой системы координат уравнение (50) имеет форму

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}.$$

При относительном криволинейном движении материальной точки решать задачу удобно в проекциях на оси натурального триэдра, т. е. на касательную и главную нормаль.

Задача 12. К концу A вертикального упругого стержня AB прикреплен груз C массой 2,5 кг. Груз C, будучи выведен из положения равновесия, совершает гармонические колебания под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от положения равновесия.

Стержень AB таков, что для отклонения его конца A на 1 см нужно приложить силу 1 Н. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза C в том случае, когда точка закрепления стержня B совершает по горизонтали прямой гармонические колебания амплитуды 1 мм и периода 1,1 с, рис. 17а.

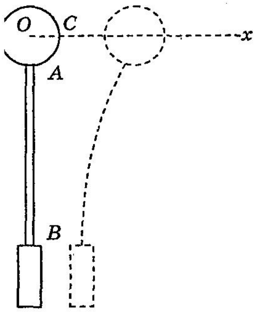

Рис. 17а

Решение. Изобразим на рис. 17б силы, действующие на груз: силу упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$ стержня, переносную силу инерции Φ_l, силу тяжести $m\bar{g}$.

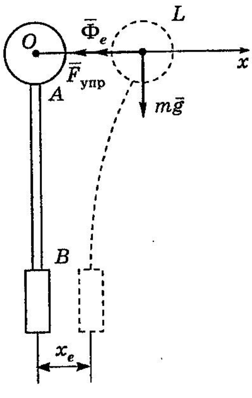

Рис. 17б

Запишем основной закон динамики в относительном движении груза в проекциях на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} - \Phi_l, \tag{51}$$

где $F_{\text{упр}} = c \cdot x$;

$\Phi_e = m\ddot{x}_e$;

$x_e = A_B \sin \alpha t$ – уравнение гармонических колебаний точки закрепления стержня, амплитуда колебаний которых $A_B = 1$ мм.

Определим $\ddot{x}_e = -A_B \omega^2 \sin \omega t$, где $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}1} = 5{,}7$ рад.

Тогда $\varphi_e = -mA_B \omega^2 \sin \omega t$.

Подставив модули сил $\overline{F}_{\text{упр}}$ и $\overline{\Phi}_e$ в формулу (51), получим

$$m\ddot{x} = -cx + mA_B \omega^2 \sin \omega t \tag{52}$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin \omega t,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{100}{2{,}5} = 40, \;\; h = A_B \omega^2.$

Общее решение неоднородного уравнения (52) представим в виде

$$x = \overline{x} + x^*, \tag{53}$$

где $\overline{x}$ – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, $\overline{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$;

x^* – частное решение уравнения (52):

$$x^* = B \sin \omega t,$$

$$\ddot{x}^* = -B\omega^2 \sin \omega t.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (53) получим

$$-B\omega^2 \sin\omega t + -Bk^2 \sin\omega t = h\sin\omega t.$$

Откуда $B = \dfrac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2}$.

Общее решение (52) запишем в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t.$$

Последнее слагаемое описывает вынужденные колебания точки C в относительном движении, амплитуда которых

$$A_{\text{отн}} = \frac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2} = \frac{1 \cdot 5,7^2}{40 - 32,49} = 4,42 \text{ мм}.$$

Общая амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{\text{вын}} = A_{\text{отн}} + A_B = 4,42 + 1,00 = 5,42 \text{ мм}.$$

Ответ: 5,42 мм.

Задача 13. В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным на угол 6°.

1) Определить ускорение a вагона.

2) Найти разность периодов колебаний маятника: T – в случае неподвижного вагона и T_1 – в данном случае.

Решение. 1) Покажем на рис. 18 действующие на маятник силы в движущемся вагоне: реакция связи (нити) $\overline{N}$, силу тяжести $m\overline{g}$ и переносную силу инерции $\overline{\Phi}_e$, $\Phi_e = ma$, где a – ускорение вагона, рис. 18.

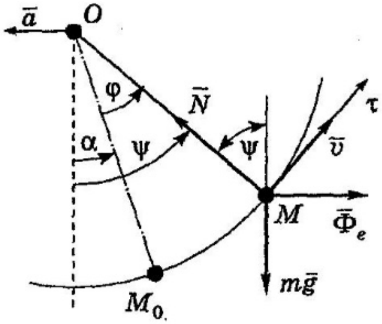

Рис. 18

Уравновешенная система сил $m\bar{g}$, $\bar{N}$ и $\bar{\Phi}_e$ образуется при угле отклонения маятника на угол 6°, рис. 19.

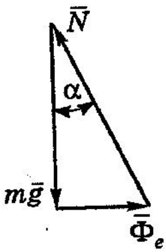

Рис. 19

В таком случае $\Phi_e = mg\text{tg}\alpha$ или $ma = mg\text{tg}\alpha$,

откуда $a = g\text{tg}\alpha = g\text{tg}6^\circ = 9{,}81 \cdot 0{,}1051 = 1{,}03$ м/с^2.

В проекции на ось τ запишем дифференциальное уравнение относительного движения маятника

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\psi + ma\cos\psi,$$

где $\upsilon = \ell\dot{\varphi}$, $\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \ddot{\varphi}$, $a = g\text{tg}\alpha$, $\psi = \alpha + \varphi$.

Преобразовав первую часть уравнения движения, получим

$$-mg\sin\psi + mg\cos\psi = -\sin\psi + \mathrm{tg}\alpha\cos\psi =$$

$$= -\frac{1}{\cos\alpha}\left[\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)\right] =$$

$$= -\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = -\frac{\varphi}{\cos\alpha}.$$

В итоге уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{g}{l\cos\alpha}$.

Следовательно, период колебаний маятника в движущемся вагоне

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = T\sqrt{\cos\alpha},$$

где $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – период колебаний маятника в неподвижном вагоне.

Откуда $T - T_1 = (1-\sqrt{\cos\alpha})$, $T = (1-\sqrt{\cos 6^\circ})$, $T = 0{,}0028T$.

Ответ: 1) $a = 1{,}03$ м/с^2; 2) $T - T_1 = 0{,}0028T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2006. – 416 с.

3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Интеграл-пресс, 2006. – 603 с.

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2: Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1991. – 638 с.

5. Аркуша, И. А. Руководство к решению задач по теоретической механике / А. И. Аркуша. – М. : Высшая школа, 2004. – 336 с.

6. Федута, А. А. Теоретическая механика и математические методы / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 500 с.

7. Теоретическая механика. Динамика. Практикум : учебное пособие: в 2 ч. / В. А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А. В. Чигарева, Н. И. Горбача. – Минск : Новое знание; М. : ЦУПЛ, 2010. – Ч. 1: Динамика материальной точки. – 528 с.

Учебное издание

ВАСИЛЕВИЧ Юрий Владимирович
ЧИГАРЕВ Василий Анатольевич
БЕЛЯЦКАЯ Лариса Николаевна и др.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пособие
для обучающихся по специальности
1-36 01 03 «Технологическое оборудование
машиностроительного производства»

Редактор *А. О. Решовский*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 11.07.2024. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,73. Уч.-изд. л. 1,12. Тираж 100. Заказ 1028.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.