

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра "Теоретическая механика"

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ**

**Часть 1. Статика**

Учебно-методическое пособие для студентов дневной,  
заочной и дистанционной форм обучения

Электронный учебный материал

**Минск ◊ БНТУ ◊ 2015**

## **Авторы:**

*Г.Н. Алехнович, Л.Н. Беляцкая, Т.Ф. Богинская*

**Рецензент:** *Ю.В. Василевич*, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов машиностроительного профиля» БНТУ, доктор физико-математических наук, профессор.

В данном учебном пособии рассмотрены все основные темы курса теоретической механики по разделу статика. В первой части приведены учебные примеры и сформулированы вопросы к решению. Во второй части приводятся ответы на поставленные вопросы и решения задач. Учебное пособие полезно для студентов всех форм обучения, изучающих теоретическую механику.

Белорусский национальный технический университет  
пр-т Независимости, 65, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.(017) 292-77-52 факс (017) 292-91-37  
Регистрационный № **БНТУ/МСФ** 25-9.2015

© БНТУ, 2015

© Алехнович Г.Н., Беляцкая Л.Н., Богинская Т.Ф. 2015

## Содержание

Введение	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ	6
1.1. Понятие тела	6
1.2. Понятие силы	6
1.3. Понятие момента силы	7
1.3.1. Момент силы относительно точки	7
1.3.2. Момент силы относительно оси	7
1.4. Понятие связи и ее реакции	9
2. УПРОЩЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ (ПЕРВАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ)	12
2.1. Упрощение сходящейся системы сил	12
2.2. Упрощение произвольной системы сил	13
Вопросы и задачи	14
3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ (ВТОРАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ)	16
Методика решения задач по статике	16
3.1. Равновесие системы сходящихся сил	16
Вопросы и задачи	16
3.2. Равновесие произвольной плоской системы сил	18
Вопросы и задачи	18
3.3. Равновесие системы сил с учетом трения	22
Вопросы и задачи	23
3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил	26
Вопросы и задачи	26
4. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ	28
Вопросы и задачи	30
5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ	31
Понятие о ферме	31
Допущения, применяемые при расчете ферм	32
Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов	32
Расчет простых плоских ферм способом сечений	33
Графический метод определения внутренних сил в стержнях простой плоской фермы (метод Максвелла-Кремоны)	33
Вопросы и задачи	34
Ответы на вопросы задач	36
Литература	52

## Введение

***Какую роль играет теоретическая механика*** в подготовке инженера любого профиля?

Теоретическая механика наряду с высшей математикой и физикой составляет научный фундамент, на котором строятся общепрофессиональные и специальные дисциплины. Она дает те знания, без которых специалисту невозможно изучить все новое, с чем приходится сталкиваться в процессе его практической деятельности. Теоретическая механика является теоретической базой ряда областей современной техники.

***Какое значение имеют учебные задачи*** при усвоении курса теоретической механики?

Учебные задачи являются неотъемлемой составной частью усвоения программного материала. Их решение способствует закреплению теоретического материала, более глубокому пониманию важнейших понятий и определений, формирует умственную деятельность обучающихся, развивает у них научный подход к постановке и решению не только учебных задач, но и тех задач практики, с которыми придется встретиться будущему инженеру.

***Как научиться решать задачи*** по теоретической механике?

Научиться решать задачи можно в результате упорного систематического труда, что под силу также студентам заочной и дистанционной форм обучения. Приступая к решению задачи, прежде всего необходимо уяснить, к какой теме она относится. Затем следует изучить по учебнику теоретический материал этой темы, обратив особое внимание на формулировки определений, теорем и правил. После этого рекомендуется познакомиться с методикой решения задач и примерами, помещенными в специальных учебных пособиях. Теперь можно приступить к выполнению решаемой задачи. В процессе решения возникает ряд вопросов, в результате чего приходится неоднократно обращаться к учебнику и пособиям.

***Чем отличается предлагаемое пособие*** от ряда других?

В нем, как и в других, дается краткий теоретический материал, необходимый для решения задач, излагается методика решения задач и их решение.

Отличие состоит в том, что решение ведется путем последовательной постановки кратких самостоятельных вопросов, ответы на которые подводят учащегося к поэтапному решению задачи. Помещенные в пособии ответы на вопросы помогают учащемуся реализовать обратную внутреннюю связь, осуществить самоконтроль усвоения.

Преимущество пособия состоит в том, что дозирование материала в форме вопросов и ответов на них концентрирует внимание учащегося на важнейших положениях теории и основных этапах решения задач, чем достигается управле-

ние познавательной деятельностью. Постановка характерных для многих задач вопросов и наличие ответов делает пособие своеобразным справочником по статике.

***Как рекомендуется пользоваться пособием?***

Оно служит дополнением к существующей учебной и методической литературе по теоретической механике, но может быть использовано в качестве самостоятельного руководства к решению задач статики.

Вначале необходимо усвоить такие фундаментальные понятия статики, как сила, пара сил, проекция силы на ось, момент силы относительно точки и оси, затем изучить типы связей, направления реакций. Затем можно приступить к задачам. При решении их необходимо давать обоснование выбранному ответу на вопрос. Не надо торопиться заглянуть в ответ, помещенный во второй части пособия. Это важно. Если ответ, выбранный учащимся, и приведенный в пособии – расходятся, следует проанализировать причину и характер расхождения.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

*Статикой* называют раздел теоретической механики, в котором изучаются различные преобразования сил и условия равновесия тел.

Из определения вытекают две основные задачи статики: 1) упрощение системы сил, т.е. замена одной системы сил другой, более простой, но производящей на одно и то же тело одинаковое действие; 2) определение условий, при которых силы, приложенные к телу, уравниваются. Обе задачи могут быть решены геометрическим или аналитическим способом.

Положения статики широко используются на практике. Различные сооружения (здания, мосты), машины и приборы могут выполнять свои служебные функции, находясь только в равновесном состоянии. Поэтому важно определить условия, при которых эти устройства находятся в равновесии под действием приложенных сил.

Чтобы успешно решать отмеченные выше задачи, необходимо четко знать важнейшие понятия статики. К ним относятся, прежде всего, тело, сила, момент силы, связь и др.

## 1.1. Понятие тела

*Телом*, иначе – объектом, в механике называется любой предмет независимо от его формы, содержания и других свойств. Исключительно разнообразны тела, равновесие которых приходится рассматривать в механике: детали машин и сами машины, элементы конструкций и сложные сооружения. Однако многие свойства тел не влияют на равновесие или влияют незначительно. Поэтому изучаемый объект часто упрощают, или идеализируют. Так, вводят понятие материальной точки, твердого тела, тела с гладкой поверхностью, невесомого тела и др. Часто рассматриваемые тела имеют сложную структуру. Их приходится расчленять на части, и рассматривать равновесие частей отдельно.

Выбор объекта равновесия и определение его взаимодействия с окружающими телами – первое необходимое условие умения решать задачи статики.

## 1.2. Понятие силы

Все тела взаимодействуют с окружающими их другими телами. Эти взаимодействия могут иметь различную природу, интенсивность и проявление. Поэтому для характеристики взаимодействия вводят меру, называемую силой.

*Силой* называют количественную меру механического воздействия одного тела на другое.

Сила характеризуется численным значением, местом приложения (точкой приложения) и направлением.

Взаимодействия тел в природе и технике исключительно разнообразны. Поэтому наряду с силой в качестве меры принимают другие величины: пару сил, момент силы относительно точки или оси.

Силы могут называться внешними или внутренними, активными или реактивными, могут иметь равнодействующую, быть уравновешенными и др.

Правильно определить силы, приложенные к выбранному телу – второе необходимое условие умения решать задачи статики.

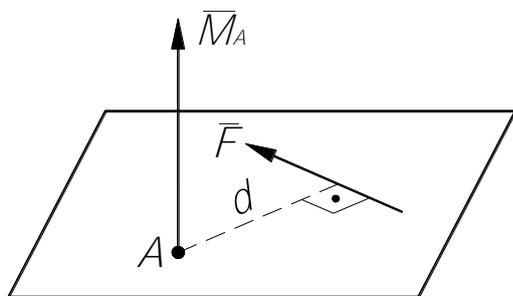
### 1.3. Понятие момента силы

Различают момент силы относительно точки и момент силы относительно оси.

#### 1.3.1. Момент силы относительно точки

*Моментом силы относительно точки* называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы. Сокращенно: момент силы относительно точки равен

$$(\bar{F}) = \pm F \cdot d. \quad (1)$$



Знак «+» ставят, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки, «-» – если – по часовой стрелке).

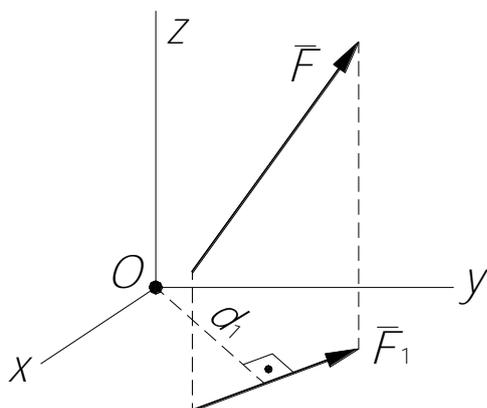
При изучении пространственной системы сил вводится понятие векторного момента силы относительно точки следующим образом. Его модуль равен

произведению силы на плечо; приложен в точке, относительно которой вычисляется момент; направлен перпендикулярно к плоскости, где лежат сила и точка, таким образом, что, глядя с конца этого вектора, видим силу, стремящуюся повернуть тело против часовой стрелки (см.  $\bar{M}_A$ ).

#### 1.3.2. Момент силы относительно оси

*Моментом силы относительно оси* называется алгебраическая величина, равная произведению проекции этой силы на перпендикулярную к оси плоскость на кратчайшее расстояние от линии действия проекции до оси, т.е.

$$(\bar{F}) = \pm F_1 d_1. \quad (2)$$



Знак «+» ставится тогда, когда сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, «-» – когда – по часовой стрелке (смотреть на силу с положительного конца оси). Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси, необходимо: спроектировать силу на перпендикулярную к оси плоскость, т.е. найти  $F_1$ ; определить кратчайшее расстояние от линии

действия проекции силы до оси  $d_1$ , и составить затем алгебраическое произведение  $F_1 d_1$ .

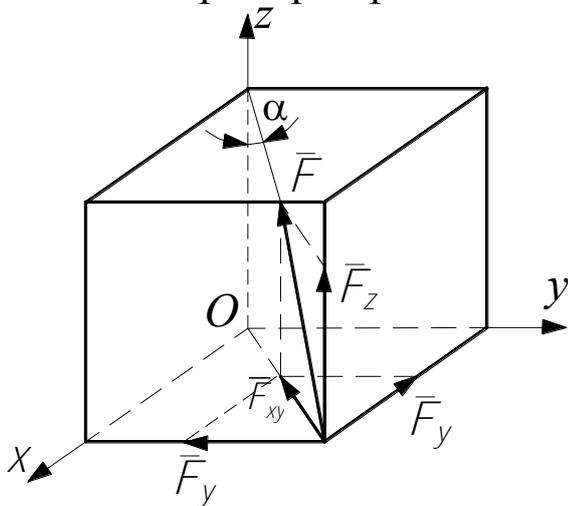
Из определения следует, что если сила параллельна оси или ее линия действия пересекает ось, то момент силы относительно оси равен нулю.

**Примечание.** Иногда момент силы относительно оси (точки) проще вычислить следующим образом. Сначала силу раскладывают на составляющие, а затем определяют моменты каждой составляющей (теорема Вариньона).

**Момент силы относительно оси (точки)** равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси (точки).

$$m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_x) + m_z(\vec{F}_y) + m_z(\vec{F}_z). \quad (3)$$

Рассмотрим пример.



Пусть требуется вычислить момент силы  $F$  относительно оси  $x$  ( $F = 20$  Н, ребро куба равно 40 см).

**Первый способ.** Разложим  $\vec{F}$  на  $\vec{F}_{xy}$  и  $\vec{F}_z$ . Согласно теореме

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_{xy}) + m_x(\vec{F}_z), \quad (4)$$

но  $\vec{F}_{xy}$  пересекает  $x$ , поэтому  $m_x(\vec{F}_{xy}) = 0$ . Отсюда

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_z) = F_z \cdot a = F \cos \alpha \cdot a = 462 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad (5)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3}/3.$$

**Второй способ.** Разложим  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_x$ ,  $\vec{F}_y$ ,  $\vec{F}_z$ . По теореме Вариньона

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_x) + m_x(\vec{F}_y) + m_x(\vec{F}_z), \quad (6)$$

но  $F_x$  параллельна оси, и  $m_x(\vec{F}_x) = 0$ , а  $\vec{F}_y$  пересекается, и  $m_x(\vec{F}_y) = 0$ . Поэтому

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}_z) = 462 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad (7)$$

**Третий способ.** С помощью формул

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= y \cdot F_z - z F_y; \\ m_y(\vec{F}) &= z \cdot F_x - x F_z; \\ m_z(\vec{F}) &= x \cdot F_y - y F_x; \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x, y, z$  — координаты точки приложения силы;

$\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  — проекции силы на оси координат, получаем

$$m_x(\vec{F}) = a \cdot F \cos \alpha - 0 \cdot (-F \sin \alpha \cdot \cos 45^\circ) = 462 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad (9)$$

## 1.4. Понятие связи и ее реакции

Все тела можно разделить на две группы свободные и несвободные.

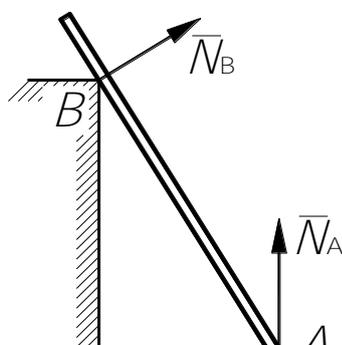
Тело называют **свободным**, если оно может получать перемещение в любом направлении (свободно падающий камень).

Тело называют **несвободным**, если оно не может получать перемещения хотя бы в одном направлении (шарик на нити не может удалиться от точки подвеса).

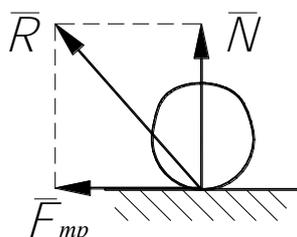
Физические тела, ограничивающие свободу других тел, называют механическими связями, или просто связями.

Сила, с которой связь действует на рассматриваемый объект, называется реакцией связи, или реактивной силой.

В подавляющем большинстве тела являются несвободными. Это значит, юе множество. Однако их можно объединить в ризнакам.

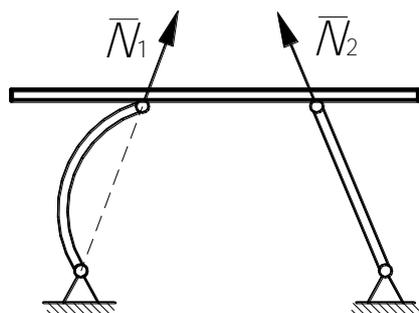


**Гладкая поверхность.** Связь ограничивает перемещение тела лишь в одном направлении. Ее реакция совпадает с нормалью к поверхности связи в точке касания (см.  $\bar{N}_A$ ). Если в точке касания к связи нельзя провести нормаль (край стены, острие), то реакцию направляют по нормали к поверхности касающегося тела (см.  $\bar{N}_B$ ).



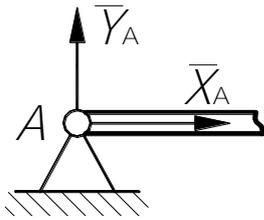
**Негладкая (шероховатая) поверхность.** В этом случае кроме нормальной реакции имеется также составляющая в касательной плоскости (силы трения).

**Гибкая связь** (трос, канат, ремень, цепь, нить). Такая связь считается невесомой ненапряжимой гибкой. Ее реакция всегда направлена вдоль связи.

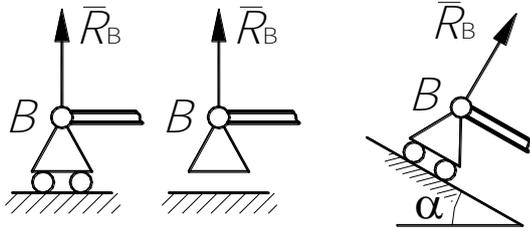


**Невесомый стержень.** Такой стержень является промежуточным звеном между телом и опорой. Он соединен с ними посредством шарниров без трения, и его реакция всегда направлена вдоль прямой, соединяющей шарниры (см.  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$ ).

учая таких опор.

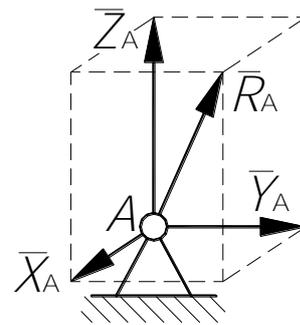
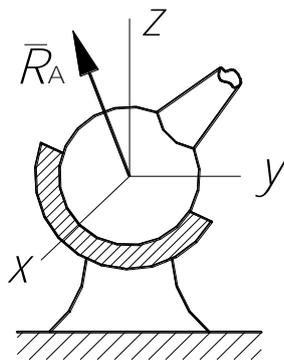


Тело соединено цилиндрическим шарниром с неподвижной опорой (**шарнирно-неподвижная опора**). Соединение позволяет телу поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция в шарнире перпендикулярна к его оси и при решении задач раскладывается обычно на две перпендикулярные составляющие.



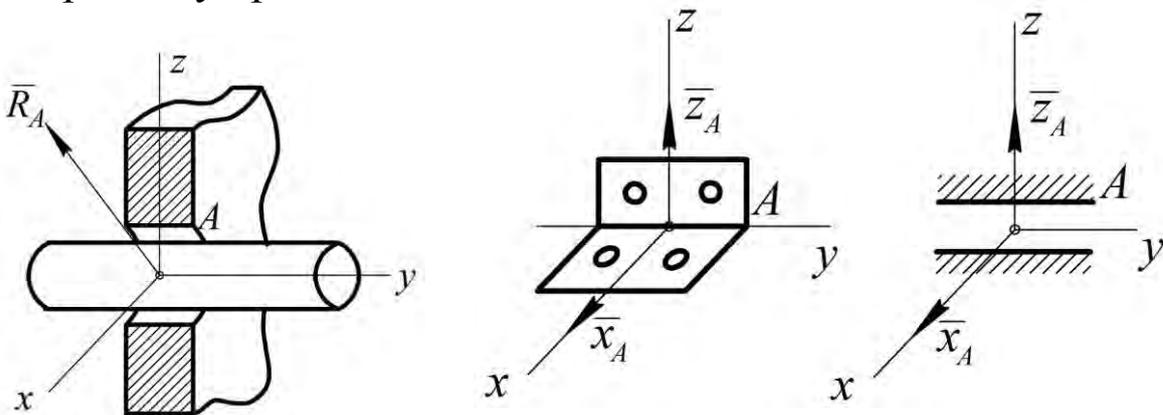
Тело соединено цилиндрическим шарниром с опорой, которая может перемещаться по другой опорной поверхности (**шарнирно-подвижная опора**). Если эта поверхность – гладкая, то реакция направлена по нормали к опорной поверхности.

Тело соединено **сферическим шарниром**. Соединение позволяет телу поворачиваться

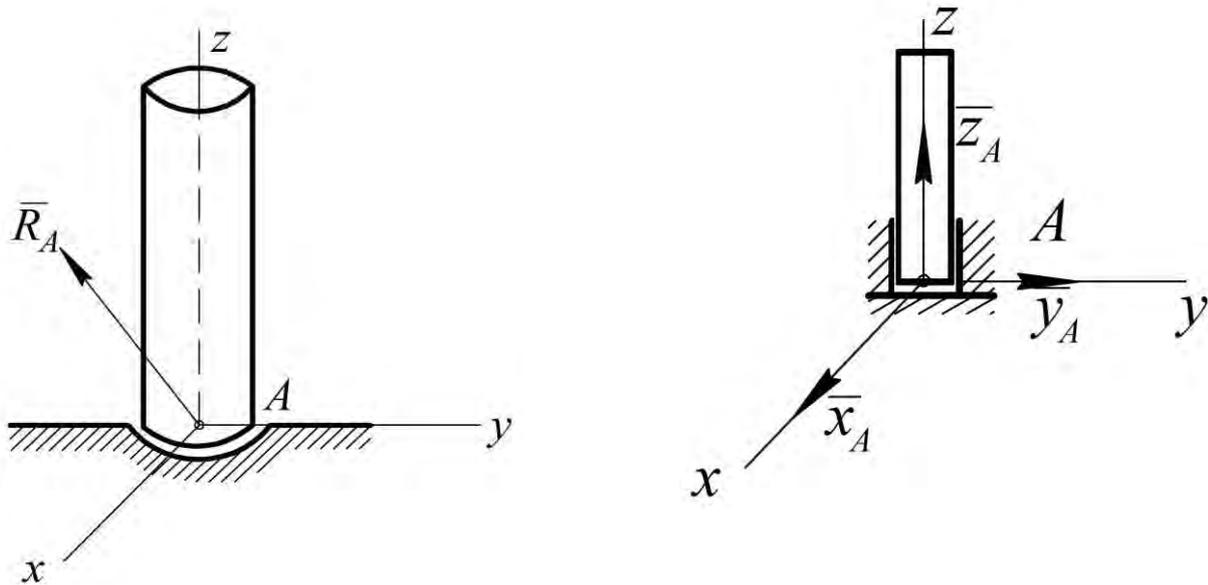


**Петля, завеса, цилиндрический подшипник.** Соединение позволяет телу поворачиваться вокруг центра петли и перемещается в отверстии. Для упрощения расчетов принимают, что данный вид связи ограничивает только линейные перемещения в плоскости перпендикулярной оси вращения вала. Опору считают бесконечно узкой и моменты реакций не учитывают.

Реакция лежит в плоскости и при решении задач обычно раскладываются на две перпендикулярные составляющие.



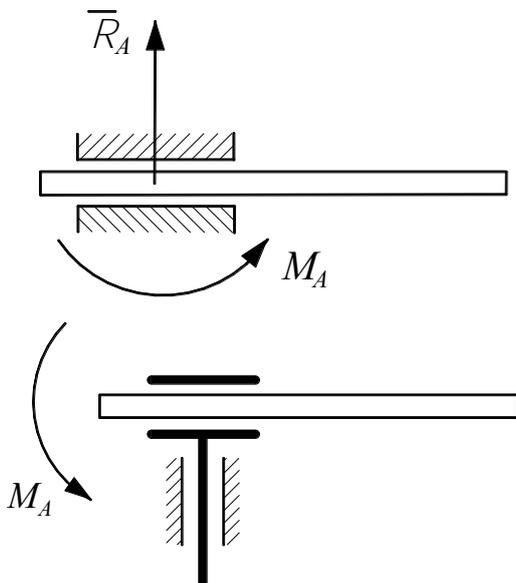
**Подпятник.** Связь позволяет телу поворачиваться, т.е. ограничивает перемещение вала по осям координат, не препятствуя его поворотам относительно осей координат. Реакцию в подпятнике при решении задач обычно раскладывают на три перпендикулярные составляющие.



**Жесткая заделка.** Если тело со связью соединено жестко (не допускаются никакие перемещения), то такое соединение называют жесткой заделкой, или зашемлением (конец балки в кирпичной или бетонной кладке, конец столба в земле). Реакция

такой связи состоит из силы и пары. Силу раскладывают на две перпендикулярные составляющие, а пару сил прикладывают к зашемленному концу, направляя ее по ходу или против хода стрелки часов (для плоской системы сил). Или на три перпендикулярные составляющие и на три пары сил вокруг трех перпендикулярных осей (для пространственной системы сил).

**Скользкая заделка.** Связь ограничивает линейное перемещение тела в одном направлении и не позволяет телу поворачиваться вокруг опоры. Ее реакция раскладывается на силу  $\bar{R}_A$ , которая направлена по нормали к заделке и на пару сил приложенных к телу с моментом  $\bar{M}_A$ .



**Двойная скользящая заделка.** Связь препятствует повороту тела. Ее реакция представляет собой пару сил приложенных к телу с моментом  $M_A$ .

Следует помнить, что рассмотренные выше связи во многом идеализированы (гладкая поверхность, невесомые стержни, шарниры без трения и прочее). Кроме того, в инженерных или даже в учебных задачах по теоретической механике часто не оговариваются типы связей, действующие на тело. В этих условиях необходимо самому проанализировать свойства связей и отнести их к тому или иному типу.

Правильно определить типы связей и показать направление их реакций – третье необходимое условие умения решать задачи статики.

## 2. УПРОЩЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ (ПЕРВАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ)

Упрощением (по иному – сложением) называют замену одной системы сил другой, более простой, но оказывающей на одно и то же тело одинаковое действие (такие системы сил называются эквивалентными).

Наиболее часто системы сил упрощают двумя способами: первый основан на аксиоме о сложении сил с помощью параллелограмма, – применяется для сходящихся сил; второй основан на теореме о параллельном переносе силы (Лемма Пуансо), – применяется для произвольной плоской и пространственной систем сил.

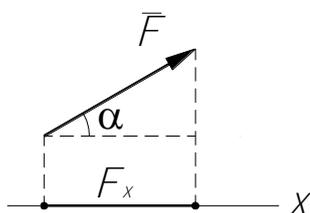
### 2.1. Упрощение сходящейся системы сил

Сходящиеся силы всегда могут быть заменены равнодействующей силой. Ее модуль и направление находят: при графическом решении по замыкающей стороне многоугольника, построенного на силах; при аналитическом решении с помощью проекций сил на координатные оси по формулам

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2};$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{j}) = R_y / R, \quad \cos(\vec{R}, \vec{k}) = R_z / R, \quad (10)$$

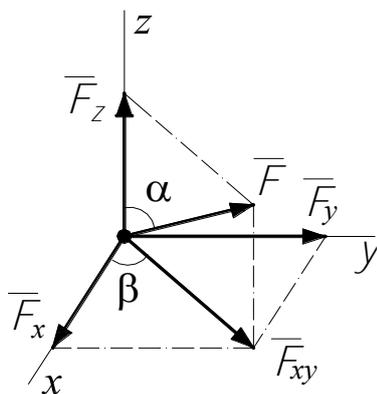
проекции сил и равнодействующей на координатные оси равны:

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y, \quad R_z = \sum F_z.$$


Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.

$$\text{пр}_x(\vec{F}) = F_x = F \cdot \cos \alpha. \quad (11)$$

При решении многих задач приходится иметь дело с силами, лежащими не в плоскости, а в трехмерном пространстве. В этом случае силу на оси координат проектируют обычно в два приема (метод двойного проецирования). Сначала ее проецируют на одну из осей (угол между которой и вектором силы известен) и на координатную плоскость двух других осей. Проекция силы на плоскость является вектором. Этот вектор затем проецируют на оси координат, расположенные в плоскости.



Пример использования метода двойного проецирования.

$$1. \text{пр}_z(\vec{F}) = F_z = F \cos \alpha$$

$$\text{пр}_{xy}(\vec{F}) = F_{xy} = F \sin \alpha$$

$$2. \text{пр}_x(\vec{F}) = F_x = \text{пр}_x(\vec{F}_{xy}) = F_{xy} \cos \beta = F \sin \alpha \cos \beta$$

$$\text{пр}_y(\vec{F}) = F_y = \text{пр}_y(\vec{F}_{xy}) = F_{xy} \sin \beta = F \sin \alpha \cos \beta$$

## 2.2. Упрощение произвольной системы сил

Произвольную систему сил в общем случае можно заменить одной силой (главным вектором –  $\vec{R}'$ ) и одной парой (главным моментом относительно центра приведения –  $\vec{M}_O$ ), что принято записывать

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \rightarrow (\vec{R}', \vec{M}_O) \text{ или } \vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n \sim (\vec{R}', \vec{M}_O).$$

Модуль и направление главного вектора находят с помощью проекций сил на координатные оси по формулам

$$R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2};$$

$$\cos(\vec{R}; \vec{i}) = R_x/R; \quad \cos(\vec{R}; \vec{j}) = R_y/R; \quad \cos(\vec{R}; \vec{k}) = R_z/R, \quad (12)$$

где  $R_x = \sum F_{ix}$ ,  $R_y = \sum F_{iy}$ ,  $R_z = \sum F_{iz}$ .

Модуль и направление главного момента относительно центра находят с помощью моментов сил относительно координатных осей по формулам.

$$M_O = \sqrt{[\sum m_x(\vec{F}_i)]^2 + [\sum m_y(\vec{F}_i)]^2 + [\sum m_z(\vec{F}_i)]^2};$$

$$\cos(\vec{M}_O; \vec{i}) = M_{Ox}/M_O; \quad \cos(\vec{M}_O; \vec{j}) = M_{Oy}/M_O; \quad \cos(\vec{M}_O; \vec{k}) = M_{Oz}/M_O, \quad (13)$$

где  $m_x(\vec{F}_i)$ ,  $m_y(\vec{F}_i)$ ,  $m_z(\vec{F}_i)$  – моменты сил относительно осей;

$M_{Ox}$ ,  $M_{Oy}$ ,  $M_{Oz}$  – проекции главного момента на оси, причем  $M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_i)$ ;

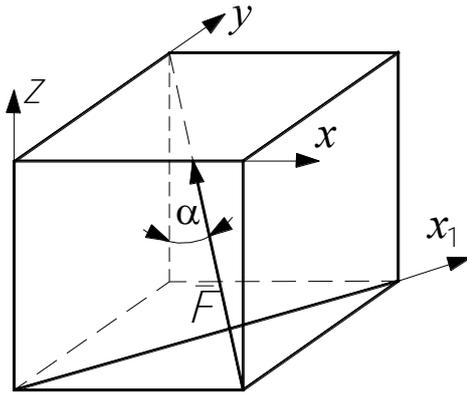
$M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_i)$ ;  $M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_i)$ .

**Примечание.** В частных случаях систему сил можно заменить:

- парой сил, если  $\vec{R}' = 0$ , а скалярное произведение –  $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz} = 0$ ;
- динамой (динамическим винтом), если  $\vec{R}' \cdot \vec{M} = R_x \cdot M_{Ox} + R_y \cdot M_{Oy} + R_z \cdot M_{Oz} \neq 0$ .

## Вопросы и задачи

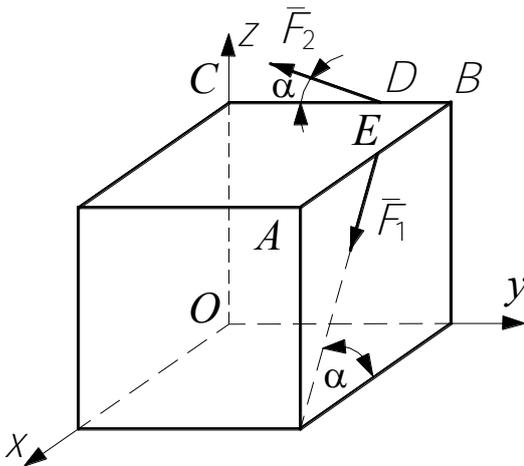
2.2.1



На куб, ребро которого  $a = 20$  см, действует сила  $F = 120$  Н. Найди момент этой силы:

- 1) относительно  $x$ ;
- 2) относительно  $z$ ;
- 3) относительно  $x_1$ .

2.2.2

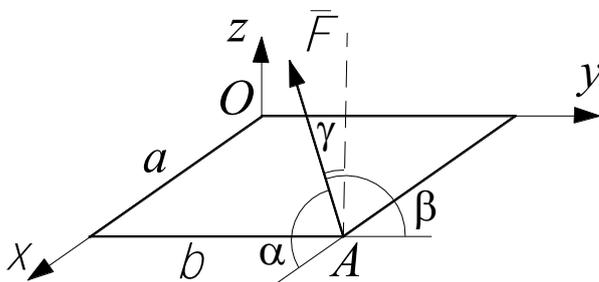


На куб, ребро которого – 24 см, действует сила  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , как показано на рисунке.

**Дано:**  $F_1 = 20$  Н,  $F_2 = 30$  Н,  
 $BE = EA$ ,  $BD = DC = 12$  см,  
 $\alpha = 30^\circ$ ,  $\vec{F}_2 \perp x$ . Вычислить моменты этих сил:

- 1) относительно  $x$ ;
- 2) относительно  $y$ ;
- 3) относительно  $z$ .

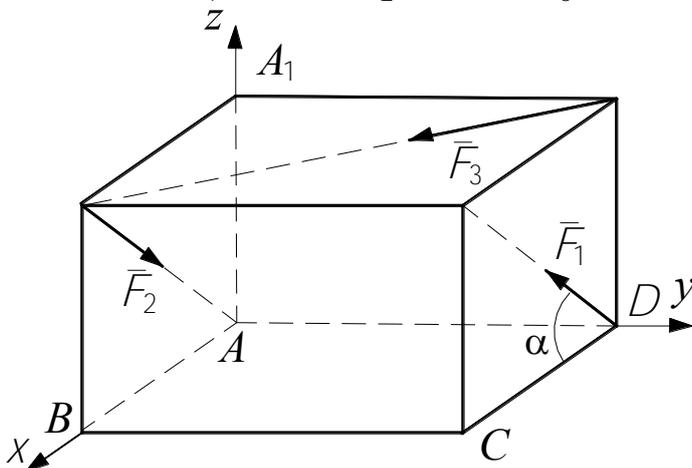
2.2.3



К прямоугольной пластине со стороны  $a$  и  $b$  приложена в точке  $A$  сила  $\vec{F}$ , составляющая углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  с прямыми, параллельными координатным осям. Вычислить моменты силы: 1) относительно  $x$ ; 2) относительно  $y$ ; 3) относительно  $z$ .

2.2.4 На прямоугольный параллелепипед действуют силы

**Дано:**  $F_1 = 10$  Н;  $F_2 = 20$  Н;  $F_3 = 30$  Н;  $AB = BC = 20$  см;  $AA_1 = 30$  см.



Вычислить суммы моментов

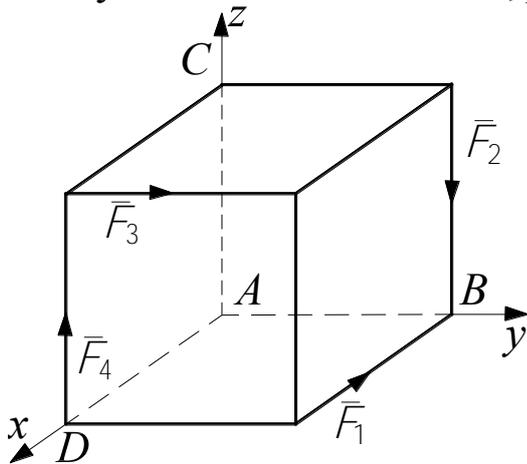
сил:

- 1) относительно  $x$ ;
- 2) относительно  $y$ ;
- 3) относительно  $z$ .

Вычислить суммы проекций сил на:

- 1) ось  $x$ ;
- 2) ось  $y$ ;
- 3) ось  $z$ .

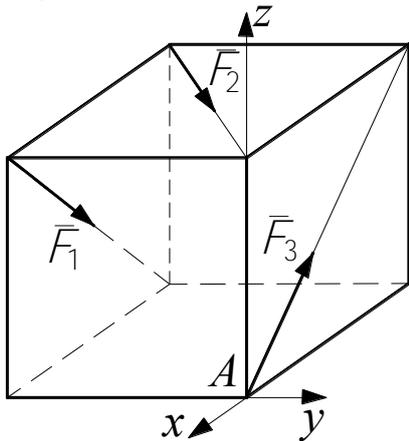
**2.5.2** На куб действуют равные по модулю силы. Требуется упростить эту систему сил. Величина силы –  $F$ , ребро куба –  $a$ .



1. К какому центру можно привести силы?
2. Имеет ли значение, как направить координатные оси из выбранного центра?
3. Найти модуль и направление главного вектора системы сил.
4. Найти модуль и направление главного момента системы сил относительно центра  $A$ .
5. Чему равен момент сил относительно центра  $C$ ?

6. Можно ли эту систему сил заменить парой сил? (см. примечание к пункту 2.2)

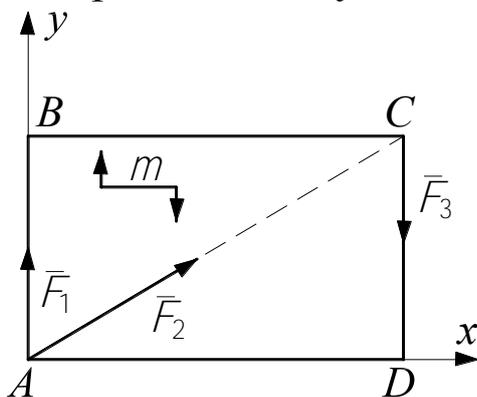
**2.2.6** На куб действуют три равные по модулю силы, как показано на рисунке.  $F_1 = F_2 = F_3 = 200$  Н. Ребро куба  $a = 20$  см. Упростить систему сил, приводя ее к центру  $A$ . Выяснить, приводится ли эта системы сил к равнодействующей.



1. Определить величину и направление главного вектора.
2. Определить суммы моментов сил относительно координатных осей.
3. Найти модуль и направление главного момента относительно  $A$ .
4. Приводится ли система сил к равнодействующей?

**2.2.7** На пластинку со сторонами  $a$  и  $b$  действуют силы  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  и пара сил с моментом  $m$ , расположенные в плоскости пластинки.

Упростить систему сил.



**Дано:**  $F_1 = F_3 = 20$  Н;  $F_2 = 40$  Н;  
 $m = 20$  Н·см;  $AB = CD = a = 20$  см;  
 $AD = BC = b = 30$  см.

1. Найти модуль и направление главного вектора.
2. Найти модуль и направление главного момента системы сил относительно точки  $A$ .
3. Можно ли систему сил заменить парой сил, равнодействующей?

### 3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ (ВТОРАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ)

Изучение равновесного состояния тела в теоретической механике сводится, как правило, к определению неизвестных сил, приложенных к телу. Знание сил позволяет инженеру выбрать подходящий материал, размер и форму тела (сооружения, технического устройства) и рассчитать его на прочность, устойчивость и другие показатели качества. Поэтому определение условий равновесия тел и нахождение сил имеет важное практическое значение.

Решая задачи статики, необходимо стремиться, чтобы наиболее коротким путем прийти к решению. Такая методика устанавливает, что надо делать и в какой последовательности.

#### Методика решения задач по статике

- 1 этап. Изучить задачу (что дано, что определить, что главное, что второстепенное – для этого иногда следует несколько раз читать условие задачи).
- 2 этап. Выбрать объект равновесия (им может быть узел, тело любой формы, сложная конструкция или ее часть, машина, механизм и прочее).
- 3 этап. Показать заданные (известные) силы, приложенные к выбранному объекту равновесия.
- 4 этап. Установить связи, действующие на объект, определить типы связей и показать их реакции.
- 5 этап. Определить вид системы сил, действующей на объект, и записать для нее уравнения равновесия (каждый вид имеет свои уравнения).
- 6 этап. Выполнить действия, предусмотренные уравнениями равновесия (спроектировать силы, вычислить их моменты и прочее), найти искомые величины, результаты проанализировать.

#### 3.1 Равновесие системы сходящихся сил

Для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на координатные оси равнялись нулю, т.е.

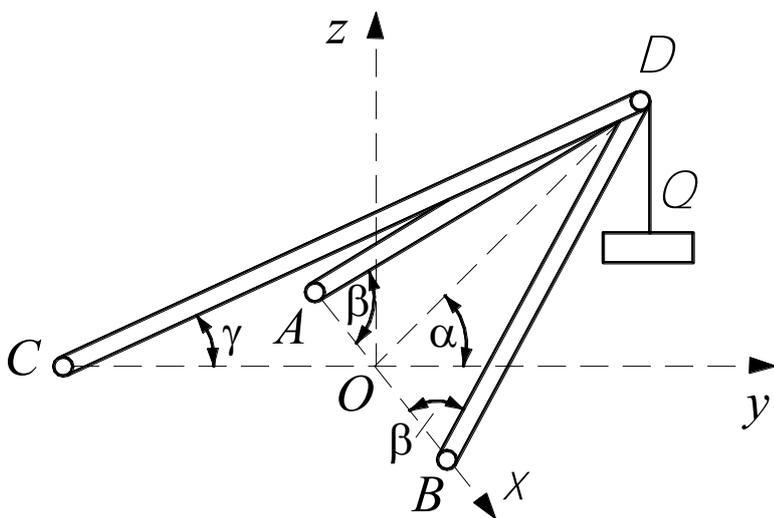
$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0. \quad (14)$$

Если сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то силы проектируются только на две оси, расположенные в этой плоскости.

#### Вопросы и задачи

**3.1.1** Груз весом  $Q$  подвешен в точке  $D$ . Крепления стержней в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – шарнирные.  $|AC| = |OB|$ .

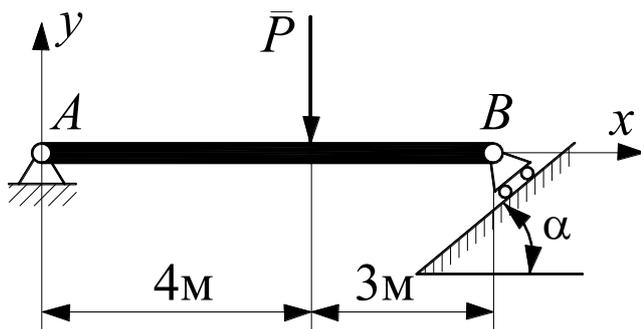
Определить усилия в невесомых стержнях  $AD$  и  $BD$ .



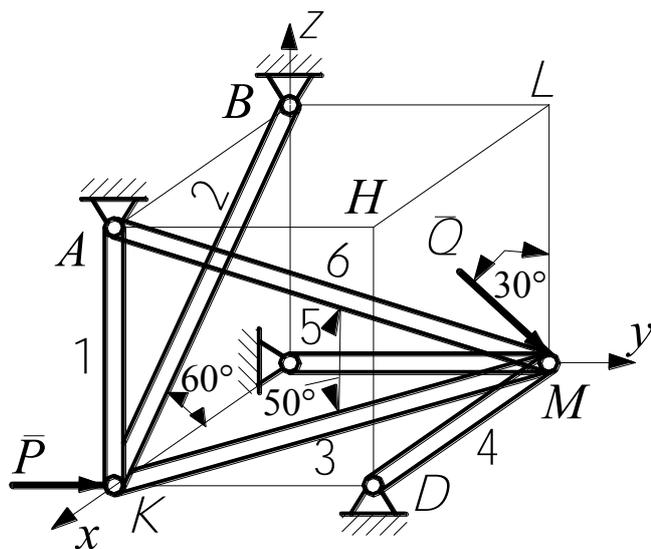
1. Выбрать объект равновесия. Обосновать направление в стержнях  $AD$  и  $BD$ .
2. Определить вид системы сил, приложенной к объекту.
3. Записать аналитические уравнения равновесия сил, действующих на объект.
4. Определить усилия в стержнях  $AD$  и  $BD$ .

**3.1.2** Горизонтальная невесомая балка  $AB$  закреплена так, как показано на рисунке. На нее действует сила  $P=7$  кН. Угол  $\alpha = 45^\circ$ . Рассмотреть равновесие балки и ответить на вопросы.

1. Назвать типы связей, действующие на балку.
2. С помощью какой теоремы можно определить линию действия реакции опоры  $A$ ? Укажите направление реакции  $\bar{R}_A$ .



3. Определить вид системы сил, приложенной к балке. Записать уравнения равновесия этой системы сил.
4. Определить  $\bar{R}_B$  геометрическим способом.
5. Определить  $\bar{R}_B$  аналитическим способом.



**3.1.3** Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в узлах  $M$  и  $K$ . К ним приложены силы  $P$  и  $Q$ .  $|KD|=|DM|$ ;  $\bar{Q} \perp OX$ ;  $\bar{P} \parallel OY$ .

Ответить на следующие вопросы.

1. В каком порядке следует рассматривать равновесие узлов при определении реакций в стержневой конструкции?
2. Составить уравнения равновесия для узлов  $K$  и  $M$ .
3. Определить усилие в стержне  $MK$ . Что можно сказать о  $\bar{S}_3$  и  $\bar{S}'_3$ ?

Определить усилие в стержне  $AM$ .

### 3.2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на две оси и сумма моментов сил относительно любой точки равнялись нулю, т.е.

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum m_A(\vec{F}_i) = 0. \quad (15)$$

Вместо уравнений (16) иногда лучше использовать другую систему уравнений

$$\sum F_{ix} = 0; \sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \sum m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (16)$$

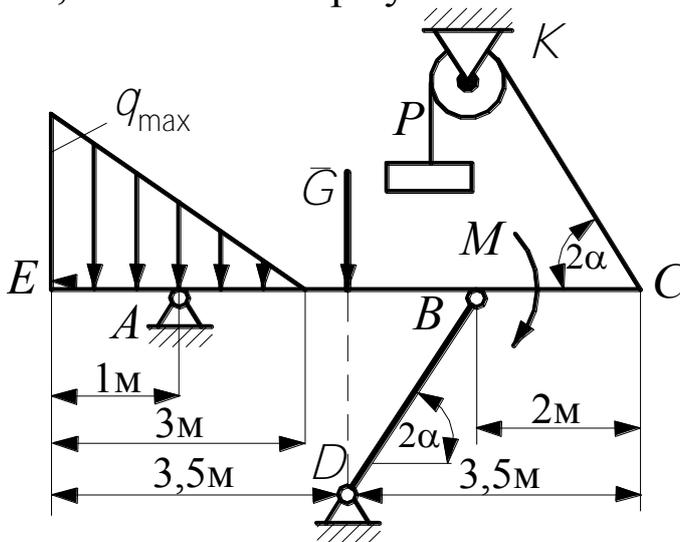
где  $A$  и  $B$  – произвольные точки; ось  $x$  не перпендикулярна к прямой  $AB$ , или третью

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \sum m_B(\vec{F}_i) = 0; \sum m_C(\vec{F}_i) = 0, \quad (17)$$

где  $A, B$  и  $C$  – произвольные точки, не лежащие на одной прямой.

### Вопросы и задачи

**3.2.1** Балка  $CE$  удерживается в горизонтальном положении и нагружается так, как показано на рисунке.



**Дано:**  $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$ ;  $G = 5 \text{ кН}$ ;

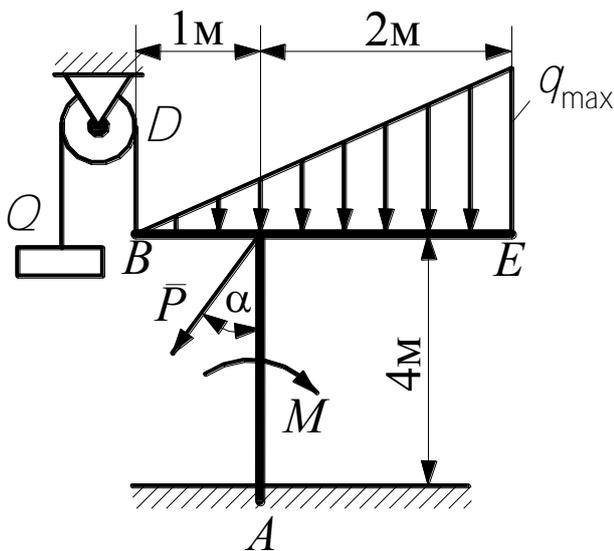
$P = 2 \text{ кН}$ ;  $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $\alpha = 15^\circ$ .

Размеры указаны на чертеже.

Определить:

1. Виды связей, действующие на балку  $CE$ .
2. Точку, в которой груз  $P$  действует на балку  $CE$ .
3. Момент силы  $\vec{P}_1$  относительно точки  $A$  (см. ответ на в.2).
4. Равнодействующую нагрузки, распределенной по линейному закону, и точку ее приложения.
5. Какое уравнение необходимо составить, чтобы определить горизонтальную составляющую реакции опоры  $A$ ?

**3.2.2** Т-образная балка закреплена так, как показано на рисунке. На нее действует нагрузка, распределенная по линейному закону, причем  $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$ ; сила  $P = 1 \text{ кН}$ ;  $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . К балке привязан трос, перекинутый через блок и несущий груз  $Q = 2 \text{ кН}$ . Рассмотреть равновесие балки и ответить на вопросы. Трением на блоке пренебречь.

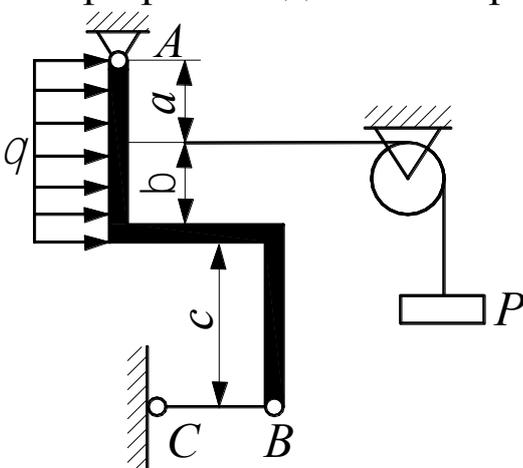


1. Что необходимо выбрать в качестве объекта равновесия для определения реакций жесткой заделки  $A$ ?
2. Показать на рисунке активные и реактивные силы, примененные к объекту равновесия. Чему равна равнодействующая нагрузки, распределенной по линейному закону?
3. Назвать вид системы сил, примененной к объекту равновесия, и записать аналитическое условие равновесия.
4. Какое следует составить уравнение для определения  $M_A$ ? Определить численное значение  $M_A$ .

**3.2.3** Жесткая рама закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах. Рама нагружена так, как показано на рисунке.

Рассмотреть равновесие рамы и ответить на вопросы:

1. Что следует выбрать в качестве объекта равновесия для определения реакций шарнирно-неподвижной опоры  $A$  и стержня  $BC$ ?



2. Изобразить на рисунке раму с примененными к ней активными и реактивными силами. Определить величину равнодействующей равномерно распределенной нагрузки. Где она будет приложена?
3. Назвать вид системы сил, примененной к раме. Сколько необходимо составить уравнений равновесия для определения реакций опор  $A$  и  $B$ ?
4. Записать уравнение, с помощью которого можно определить  $\bar{R}_B$ . Как направлена реакция стержня?

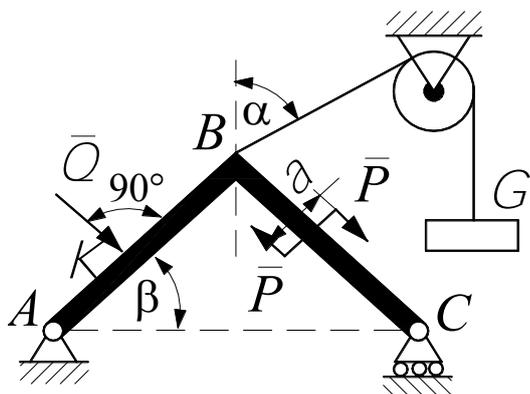
**3.2.4** Изогнутый стержень  $ABC$  находится под действием нагрузки так, как показано на рисунке.

**Дано:**  $Q = 40 \text{ Н}$ ;  $G = 120 \text{ Н}$ ;  $P = 30 \text{ Н}$ ;  $a = 2 \text{ м}$ ;  $AB = BC = 4 \text{ м}$ ;  $AK = KB$ ;

$\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ .

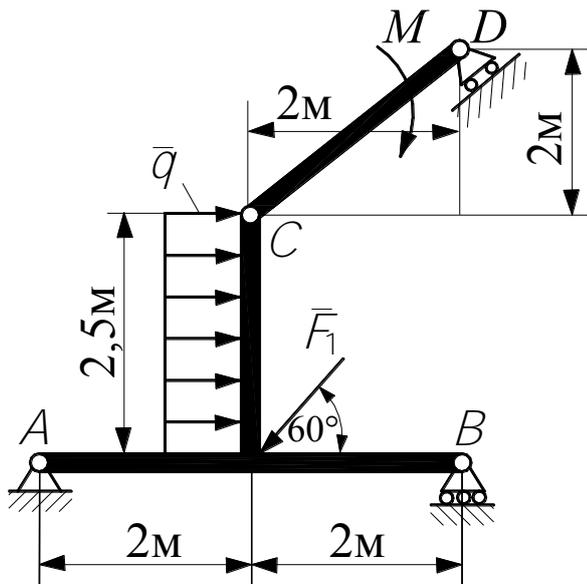
Рассмотреть равновесие стержня и ответить на следующие вопросы:

1. Назвать типы связей для изогнутого стержня  $ABC$ .



3.2.5

2. Чем определяется количественная характеристика действия пары сил  $(\bar{P}, \bar{P})$  на стержень с приложенными к нему активными и реактивными силами.
3. Указать вид системы сил, приложенной к стержню.
4. Записать уравнение, с помощью которого можно определить  $Y_C$ .

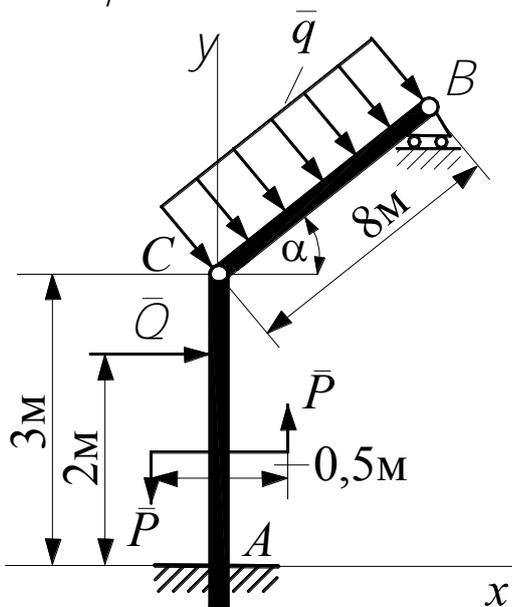


3.2.6 На балку AC составной конструкции ACB действует пара сил  $(\bar{P}, \bar{P})$  и сила Q. На балку BC действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q.

Составная конструкция нагружена и закреплена так, как изображено на рисунке.

Ответить на вопросы:

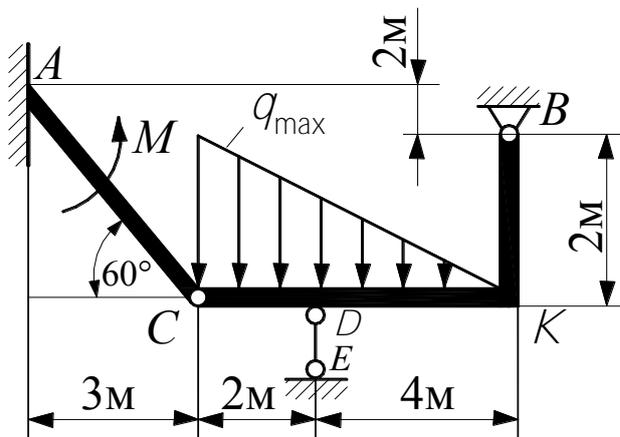
1. Какой общий прием используется при решении задач на составные конструкции?
2. Определить реакцию в т. D.
3. Записать уравнения равновесия для второй части составной конструкции (для ACB).
4. Записать момент силы  $\bar{F}_1$  относительно т. D.



Дано:  $P=2$  кН;  $Q=0,5$  кН;  $q=3$  кН/м;  $\alpha=30^\circ$ .

1. Назвать типы связей в опорах A и B. Показать на чертеже реакции связей.
2. Как следует расчленить конструкцию для определения реакции  $\bar{R}_B$ ? Показать силы, действующие на AC и CB после расчленения конструкции.
3. Составить уравнения равновесия сил, действующих на AC и CB.
4. Вычислить  $\bar{R}_B$ .
5. Зная  $\bar{R}_B$ , найти наиболее просто  $M_A$ .

**3.2.7** Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке  $C$  соединены шарнирно. Конструкции нагружена так, как показано на рисунке. Рассмотреть равновесие конструкции и ответить на вопросы.

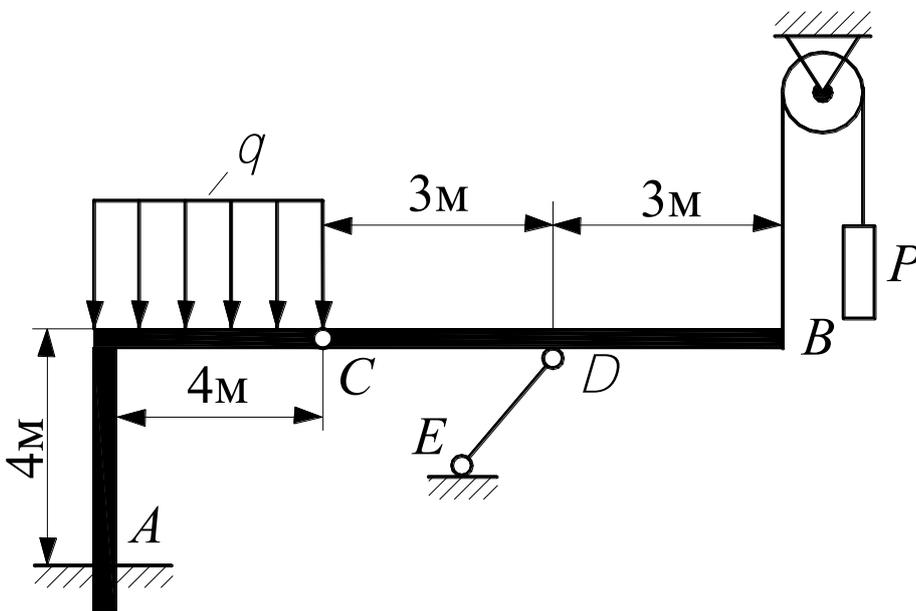


1. Назвать виды связей, действующих на конструкцию. Изобразить на рисунке конструкцию и показать все силы, действующие на нее.
2. Рассмотреть равновесие стержня  $AC$ . Записать уравнения равновесия, определить реакцию гладкой стенки и реакцию соединительного шарнира  $C$ .
3. Какое уравнение позволит

определить реакцию стержня  $ED$ ? Запишите его (с учетом пункта 2).

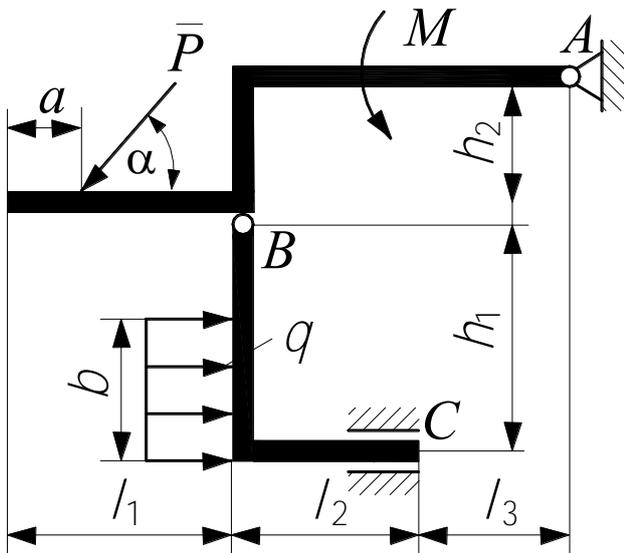
**3.2.8** Конструкция составлена из жесткого угольника и стержня, соединенных шарниром  $C$ . Она нагружена так, как показано на рисунке. Рассмотреть равновесие конструкции и ответить на вопросы.

1. Как можно классифицировать силы, действующие на рассматриваемую систему тел: жесткий угольник, стержень?
2. Показать на рисунке все внешние силы, действующие на конструкцию.



3. Записать уравнение, которое позволит определить  $\bar{R}_{ED}$ .
4. Записать уравнения, которые позволяют определить реакцию шарнира  $C$ .
5. Записать уравнение, позволяющее определить  $M_A$ .

**3.2.9** Составная конструкция нагружена и закреплена так, как изображено на рисунке.



**Дано:**  $P = 18 \text{ кН}$ ;  $q = 3 \text{ кН/м}$ ;  
 $M = 40 \text{ кН/м}$ ;  $l_1 = 6 \text{ м}$ ;  $l_2 = 6$ ;  $l_3 = 0 \text{ м}$ ;  
 $h_1 = 6 \text{ м}$ ;  $h_2 = 4 \text{ м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $a = 3 \text{ м}$ ;  
 $b = 4 \text{ м}$ .

1. Назвать типы связей в опорах  $A$  и  $C$ . Показать на чертеже реакции связей.
2. Расчленить конструкцию. Показать силы, действующие на  $AB$  и  $BC$  после расчленения конструкции.
3. Составить уравнения равновесия сил, действующих на  $BC$  и  $AB$ .
4. Вычислить давление в опорах  $A$  и  $C$ , а также усилие в шарнире  $B$ .

### 3.3. Равновесие системы сил с учетом трения

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей этих тел возникают силы, препятствующие движению. Это явление называется трением. Различают трение покоя, трение движения и трение качения.

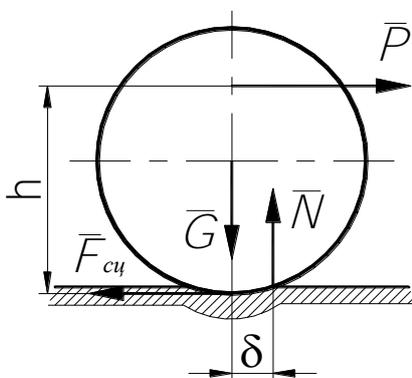
При трении покоя величина силы трения зависит от действующих на тело активных сил и может изменяться от нуля до некоторого своего наибольшего значения. Сила трения покоя, любое превышение которой ведет к возникновению движения, называется наибольшей силой трения покоя.

Величина этой силы, имеющей место в предельном положении покоя тела, определяется по формуле

$$F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f \cdot N, \quad (18)$$

где  $f$  – коэффициент сцепления;  $N$  – сила нормального давления, прижимающая тела друг к другу.

Трение двух тел находящихся в относительном движении, называется тре-



Трение качения возникает при перекатывании тела (катка) по поверхности другого тела и обусловлено их деформацией. Вследствие этого тела соприкасаются по некоторой площадке, а нормальная составляющая  $\bar{N}$  полной реакции опорной поверхности смещается от оси катка в сторону его движения. Величина смещения  $\delta$  в предельном положении покоя называется коэффициентом трения качения и имеет размерность

длины. Сила  $\bar{N}$  и вес катка  $\bar{G}$  образуют пару сил с плечом  $\delta$ , момент которой  $M_T = \delta \cdot N$  называется моментом трения качения.

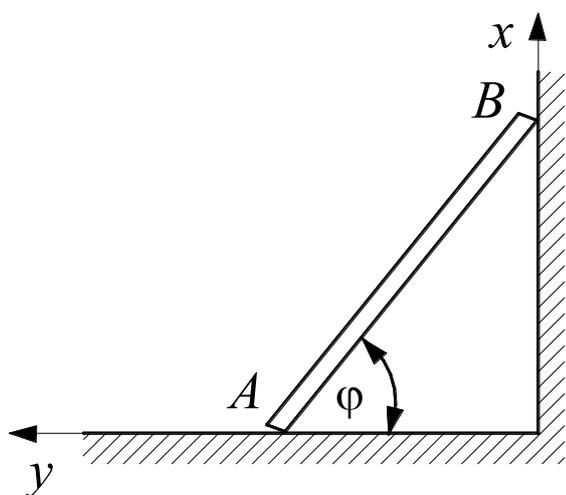
Качение катка без скольжения будет иметь место, если

$$F_{\text{сц}}^{\text{max}} \geq P = \frac{\delta}{h} N. \quad (19)$$

Методика решения задач на равновесие с учетом сил трения – такая же, как и при отсутствии трения. Однако в этом случае рассматривается предельное положение равновесия тела. Это позволяет по вышеприведенным зависимостям определить наибольшую силу трения покоя и момент трения и с учетом этого составить необходимые уравнения равновесия, соответствующие системе сил реакций и активных сил, действующих на тело.

### Вопросы и задачи

#### 3.3.1



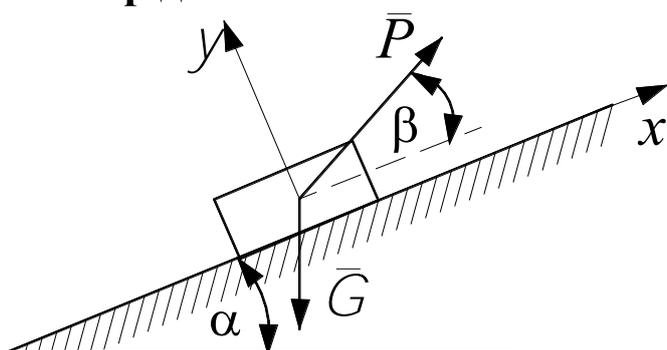
Однородный брус весом  $G$  опирается концом  $A$  на шероховатый горизонтальный пол, а концом  $B$  – на гладкую вертикальную стену. Коэффициент сцепления в точке  $A$  равен  $f$ .

**Определить:**

1. Направление реакции в точке  $B$ .
2. Величину этой реакции.
3. Наименьший угол  $\varphi$ , при котором возможно равновесие.
4. Возможно ли равновесие, если пол будет гладким, а стена – шероховатой?

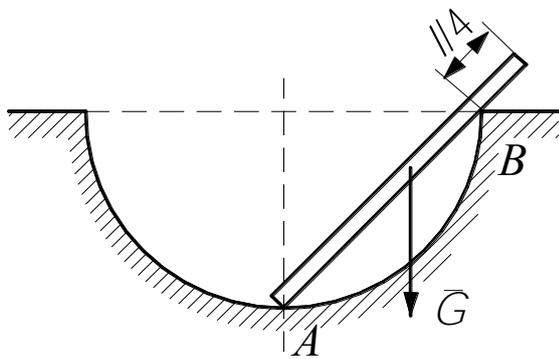
**3.3.2** На шероховатой наклонной под углом  $\alpha$  к горизонту плоскости находится в равновесии груз весом  $G$ , к которому приложена сила  $\bar{P}$ , образующая с плоскостью угол  $\beta$ . Коэффициент сцепления равен  $f$ .

**Определить:**



1. Нормальную реакцию  $N$  плоскости.
2. Наибольшую силу трения покоя.
3. Максимальное значение силы  $P$ , при котором груз будет оставаться в равновесии.
4. Минимальное значение силы  $P$ , при котором груз будет оставаться в равновесии.

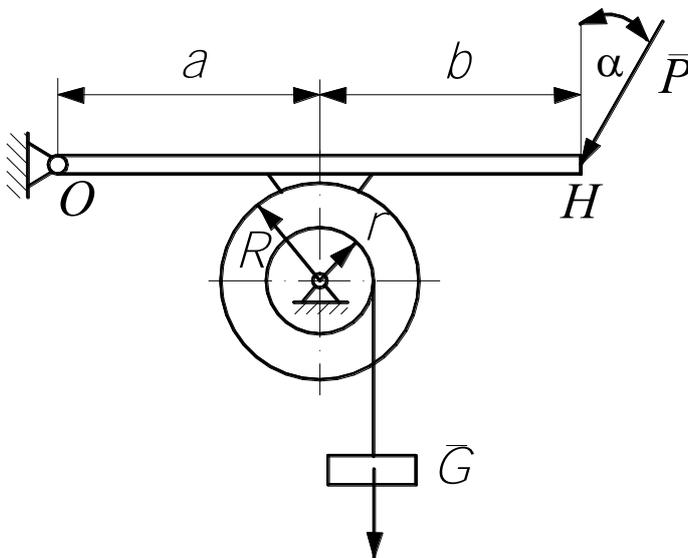
**3.3.3** Однородный стержень весом  $G$  и длиной  $l$  находится в равновесии, опираясь концом  $A$  на днище полусцилиндрического желоба. Коэффициент сцепления в точке  $A$   $f_A = 1$ , в точке  $B$   $f_B = 0$ .



**Определить:**

1. Направление реакции в точке  $B$ .
2. Направление полной реакции в точке  $A$ .
3. Величину нормальной реакции в точке  $A$ .
4. Численные значения угла сцепления и коэффициент сцепления в точке  $A$ .

**3.3.4**



На барабан радиуса  $r$  намотан трос, к которому подвешен груз весом  $G$ . Груз удерживается в равновесии с помощью тормоза. К рычагу  $OA$  тормоза приложена сила  $P$  под углом  $\alpha$  к вертикали. Коэффициент сцепления между тормозной колодкой и шкивом равен  $f$ . Радиус шкива —  $R$ .

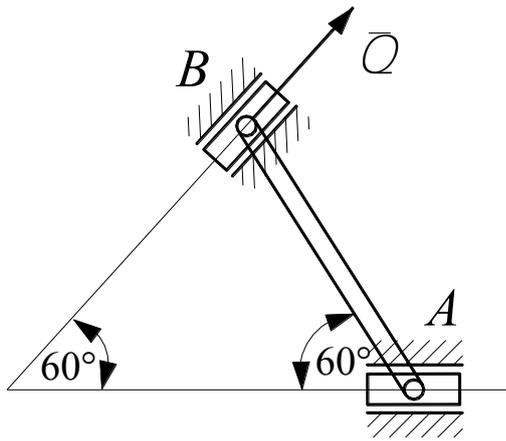
**Определить:**

1. Равновесие какого тела следует рассмотреть для определения величины силы нормального

давления между тормозной колодкой и шкивом?

2. Какое для этого нужно составить уравнение равновесия?
3. Определить величину силы нормального давления  $N$  рычага на тормозной шкив.
4. Определить минимальное значение величины силы  $P$ , при котором барабан не будет вращаться.

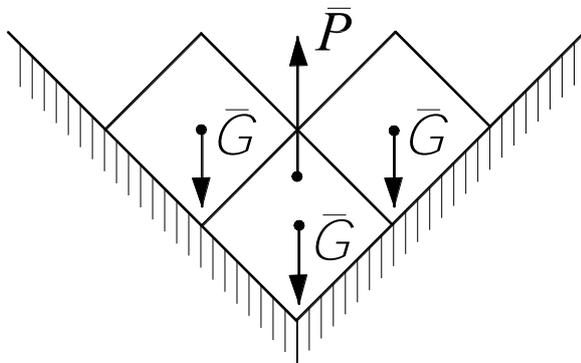
**3.3.5** Определить стержень  $AB$  весом  $G = 40$  Н прикреплен шарнирно к невесомым ползунам  $A$  и  $B$ . Коэффициент трения ползуна  $A$  о направляющие  $f_A = 1$ . К ползуну  $B$  приложена сила  $Q = 20$  Н, направленная вверх. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Трением ползуна  $B$  пренебречь.



**Определить:**

1. Направление силы трения ползуна  $A$  о направляющие.
2. Модуль нормальной реакции направляющих ползуна  $B$ .
3. Модуль нормальной реакции направляющих ползуна  $A$ .
4. Величину коэффициента сцепления в направляющих ползуна  $A$ .

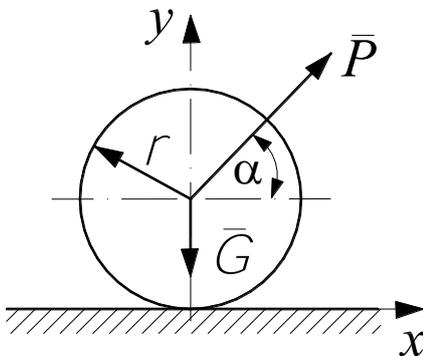
**3.3.6** Три кубика одинакового веса  $G$  расположены в вертикальной плоскости на двух наклонных плоскостях, образующих двугранный угол. Коэффициент сцепления между кубиками и наклонными плоскостями равен  $f$ .



**Определить:**

1. Нормальное давление  $N_1$  крайнего кубика на наклонную плоскость в момент выгаскивания среднего кубика.
  2. Нормальное давление  $N_2$  в этот момент между средним и крайним кубиками.
  3. Отношение  $N_2$  к  $N_1$  при  $f = 0,2$ .
4. Какую силу  $P$  нужно приложить к среднему кубику для того, чтобы его выгаскивать?

**3.3.7** Однородный цилиндрический каток весом  $G = 10$  кН и радиусом  $r = 0,5$  м находится под действием силы  $\bar{P}$ , приложенной под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Коэффициент сцепления между катком и опорной поверхностью  $f = 0,2$ .



**Определить:**

1. Силу  $P$ , необходимую для равномерного качения катка.
2. Величину силы нормального давления катка на поверхность.
3. Максимальную силу сцепления между катком и опорной поверхностью.
4. Будет ли наблюдаться при качении проскальзывание катка?

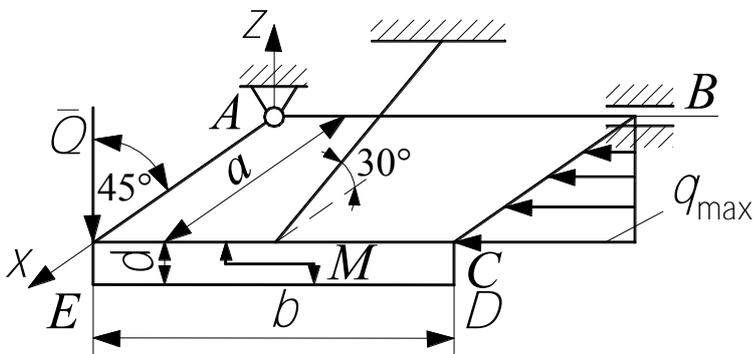
### 3.4. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на три оси и суммы моментов сил относительно этих осей равнялись нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum m_z(\bar{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

#### Вопросы и задачи

**3.4.1** Две однородные плиты весом  $P_1$  и  $P_2$ , сваренные под прямым углом друг к другу, крепятся и нагружаются так, как изображено на рисунке. В точке  $A$  – сферический шарнир. Нагрузка распределена по линейному закону, действующему в плоскости  $xAy$ .



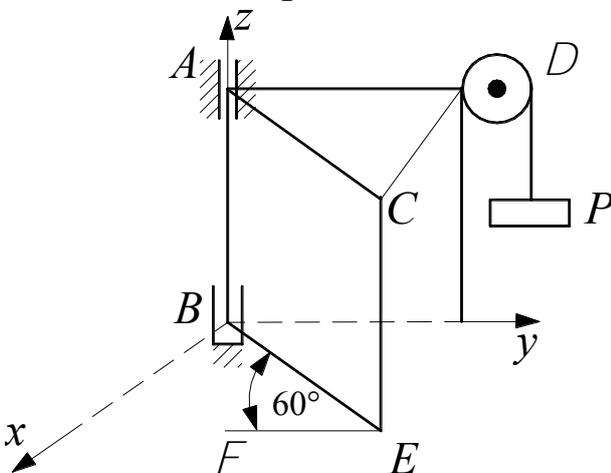
1. Заменить распределенную нагрузку равнодействующей.
2. Указать объект равновесия.
3. Изобразить на рисунке все силы, приложенные к объекту равновесия.
4. Составить уравнение равновесия для определения

реакции невесомого стержня  $\bar{T}$ .

5. Составить уравнение равновесия для определения  $z_B$ .

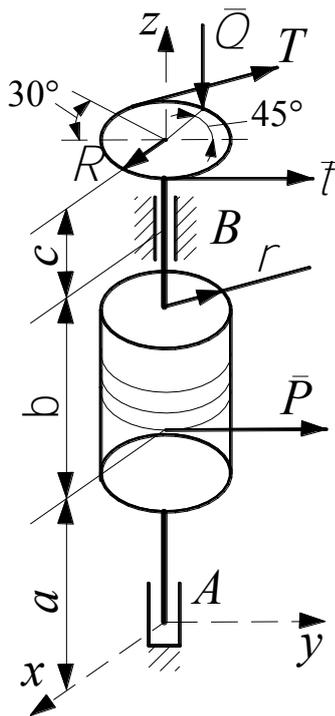
**3.4.2** Прямоугольная дверь  $ABEC$ , имеющая вертикальную ось вращения  $AB$ , открыта на угол  $DAC = 60^\circ$  и удерживается в этом положении двумя веревками  $EF$  и  $CD$ .

Дано: вес двери  $Q = 54$  кН;  $P = 40$  кН;  $AC = AD = 1,6$  м;  $AB = 2,2$  м.



1. Указать объект равновесия.
2. Указать связи и показать все силы, приложенные к выбранному объекту.
3. Определить вид системы сил, приложенный к объекту.
4. Составить уравнение равновесия, позволяющее рассчитать натяжение веревки  $EF$ .
5. Определить момент силы  $P_1$  относительно  $BX$  ( $P_1 = P$ ).
6. Определить вертикальную составляющую подпятника  $Z_B$ .

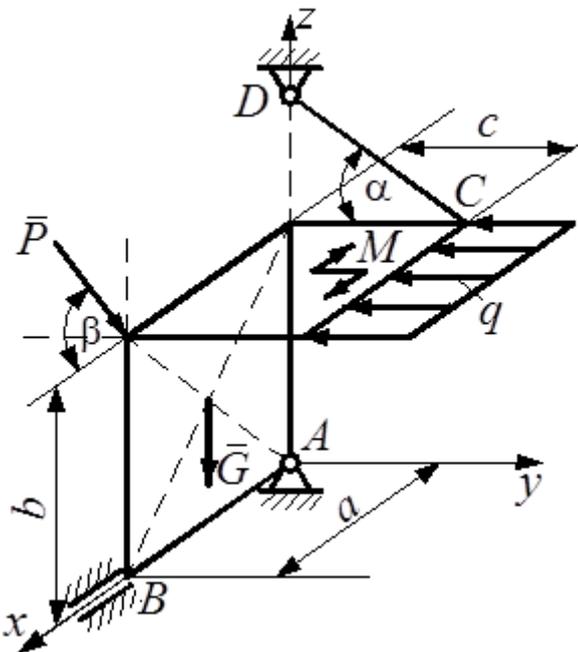
3.4.3



Вал  $AB$ , закрепленный подпятником  $A$  и цилиндрическим подшипником  $B$ , находится в равновесии под действием нагрузок, как показано на рисунке.  $T = 2t$ ;  $\vec{t} \parallel Ay$ ;  $\vec{T} \perp Az$ ;  $\vec{P} \parallel Ay$ .

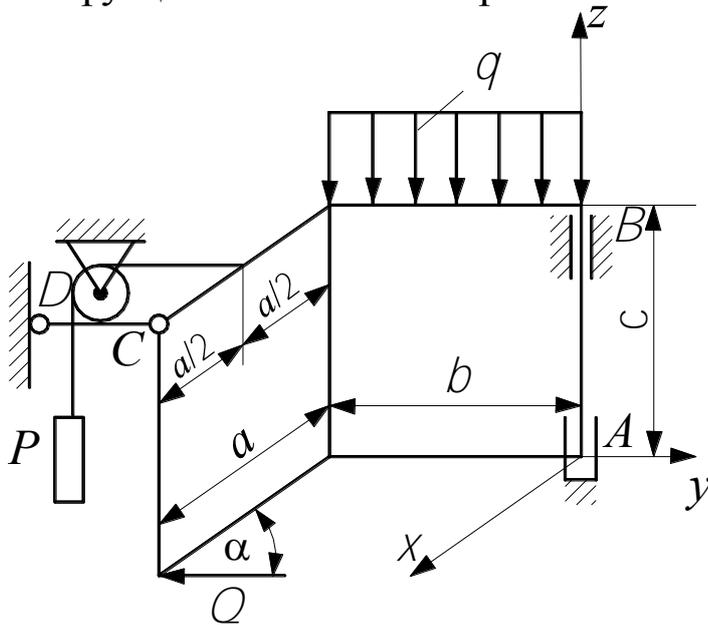
1. Назвать реакции подпятника  $A$  и цилиндрического подшипника  $B$ .
2. Какая система сил действует на вал  $AB$ ?
3. Записать аналитическое условие равновесия системы сил, под действием которой находится вал  $AB$ .
4. Составить уравнения  $\sum F_{ix} = 0$  и  $\sum F_{iy} = 0$ .
5. Какое уравнение равновесия позволит определить  $x_B$ ? Запишите его.

3.4.4 Две однородные прямоугольные плиты, сваренные под прямым углом друг к другу, крепятся и нагружаются так, как показано на рисунке. Рассмотреть равновесие конструкции и ответить на вопросы.



1. Назвать реакции сферического подшипника  $A$ , цилиндрического подшипника  $B$  и стержня  $CD$ .
2. Какая система сил действует на конструкцию? Записать аналитическое условие равновесия этой системы сил.
3. Составить уравнения  $\sum F_{iy} = 0$  и  $\sum F_{iz} = 0$ .
4. Какое уравнение позволит определить реакцию стержня  $CD$ ? Составьте его.
5. Составить уравнение, позволяющее определить  $y_B$ .
6. Определить момент силы  $P$  относительно оси  $Ay$ .

**3.4.5.** Две прямоугольные плиты, сваренные под прямым углом друг к другу, крепятся и нагружаются так, как показано на рисунке. Рассмотреть равновесие конструкции и ответить на вопросы.

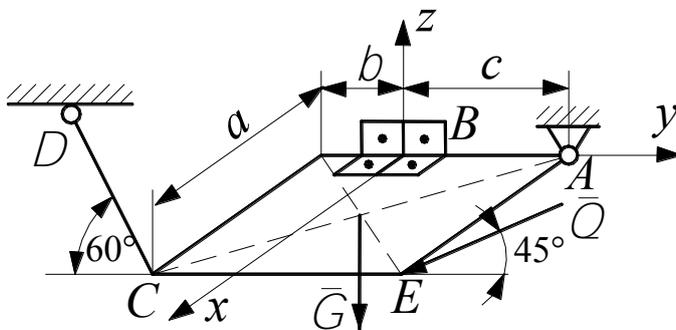


1. Назвать виды связей для конструкции.
2. Показать на рисунке все активные и реактивные силы, примененные к конструкции. Записать для полученной системы сил уравнения равновесия.
3. Какое уравнение позволит определить усилие в невесомом стержне  $CD$ ? Составить его.
4. Составить уравнение равновесия для определения  $X_B$ .
5. Составить уравнение равновесия для определения  $Z_A$ .

**3.4.6** Рама удерживается в горизонтальном положении так, как показано на рисунке.

Дано:  $G = 5$  кН;  $Q = 10$  кН;  $a = 5$  м;  $b = 2$  м;  $c = 4$  м;  $CD \perp BX$ ;  $\bar{O} \perp BZ$ .

1. Указать объект равновесия и виды связей.



2. Изобразить на рисунке все силы, примененные к объекту равновесия.
3. Определить вид системы сил, примененной к объекту равновесия. Записать аналитическое уравнение равновесия для этой системы сил.

4. Какое уравнение позволит рассчитать реакцию невесомого стержня  $CD$ ? Составить его.

#### 4. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

Координаты центра тяжести тела определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G}; \quad y_c = \frac{\sum y_i \Delta G_i}{G}; \quad z_c = \frac{\sum z_i \Delta G_i}{G} \quad (21)$$

где  $G$  – общий вес тела;  $x_i, y_i, z_i$  – координаты точек приложения сил тяжести элементарных частей, на которые разбито тело;  $\Delta G_i$  – вес элементарной части тела.

Если вес любой элементарной части выразить для объемного тела  $\Delta G_i = \gamma \Delta V_i$ , для площади –  $\Delta G_i = \sigma \cdot \Delta S_i$ , для линии  $\Delta G_i = \rho \Delta l_i$ , где  $\gamma, \sigma$  и  $\rho$  – соответственно вес единицы объема, площади, длины линии, то получим общие формулы для определения координат центров тяжести однородных объемов

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}; \quad (22)$$

однородной площади

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta S_i}{S}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta S_i}{S}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta S_i}{S} \quad (23)$$

и однородной линии

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{l}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta l_i}{l}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta l_i}{l}. \quad (24)$$

В этих формулах  $V = \sum \Delta V_i$ ;  $S = \sum \Delta S_i$ ;  $l = \sum \Delta l_i$  – соответственно объем тела, площадь фигуры и длина линии.

Определение координат центров тяжести однородных тел по формулам (22–24) сводится к вычислению определенных интегралов по всему объему, площади или линии. Таким способом получены формулы для определения координат центров тяжести полушара (на расстоянии  $\frac{3}{8} R$  от основания), конуса

(на расстоянии  $\frac{1}{4} H$  от основания), кругового сектора (на расстоянии  $\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

от центра круга) и дуги окружности (на расстоянии  $R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  от центра окружно-

сти). Для всех этих объектов центр тяжести расположен на оси симметрии.

Если объемное тело, плоская фигура или линия имеют сложную геометрическую форму, то для определения координат центров тяжести применяются метод разбиения, метод дополнения или метод отрицательных объемов, площадей.

В этом случае в формулах (16–18) под  $\Delta V_i, \Delta S_i$  и  $\Delta l_i$  следует понимать соответственно объем, площадь или длину линии отдельных элементов простой геометрической формы (полушар, цилиндр, сектор, треугольник и т.д.), на которые разбита сложная фигура;  $x_i, y_i$  и  $z_i$  – координаты центров тяжести этих элементов в выбранной системе координат.

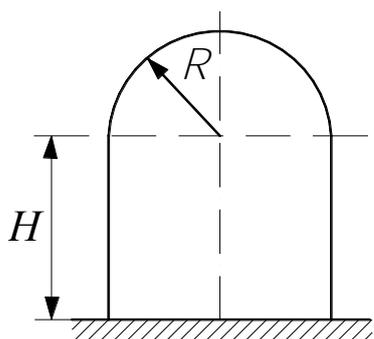
Координаты центра тяжести плоских фигур (пластин) можно определять также по формулам

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}, \quad (25)$$

где  $S_y = \sum x_i \Delta S_i$ ;  $S_x = \sum y_i \Delta S_i$  – статические моменты площади относительно осей координат.

## Вопросы и задачи

4.1

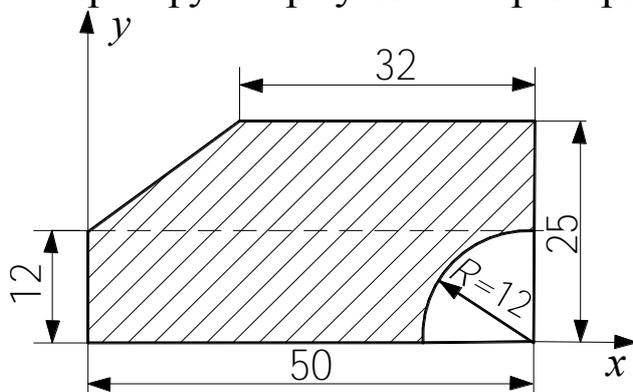


Однородное тело, состоящее из цилиндра высотой  $H=28$  см, радиусом  $R=40$  см и полушара такого же радиуса, поставлено на горизонтальную плоскость цилиндрической частью.

**Определить:**

1. Расстояние от плоскости до центра тяжести полушара.
2. Расстояние от плоскости до центра тяжести всего тела.
3. Будет ли оставаться тело в устойчивом положении равновесия, если его поставить на плоскость сферической частью?

4.2 От прямоугольной пластины размером  $25 \times 50$  см отсечены треугольник и четверть круга. При указанных размерах для оставшейся части определить:

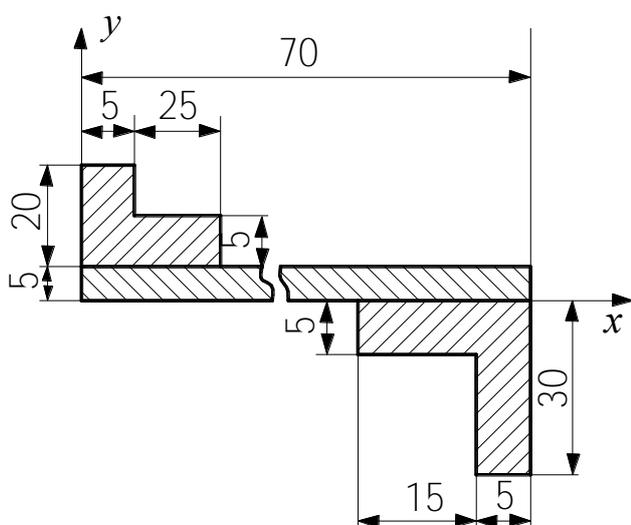


1. Каким методом следует пользоваться для определения координат центров тяжести пластины и на какие простейшие фигуры при этом ее следует разбить?

2. Координаты центра тяжести отсеченного треугольника.

3. Координаты центра тяжести отсеченного сектора.
4. Координаты центра тяжести всей пластины.

4.3

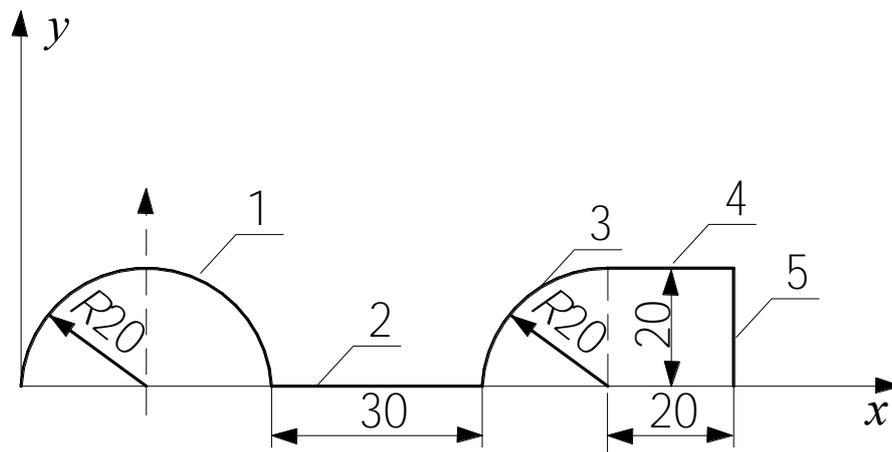


Для изображения на чертеже поперечного сечения сварной балки из однородных материалов **определить:**

1. Статический момент площади относительно оси  $Ox$ .
2. Статический момент площади относительно оси  $Oy$ .
3. Координаты центра тяжести всего сечения.
4. Чему равны статические моменты площади относительно осей, начало которых выбрано в центра тяжести сечения?

Все размеры даны в сантиметрах.

4.4



Из однородной проволоки, поперечным размером которой можно пренебречь, изготовлено крепление. В выбранной системе координат определить:

1. Координаты центра тяжести первого участка (полуокружности).
2. Координаты центра тяжести третьего участка (четверти окружности).
3. Координаты центра тяжести всего контура.

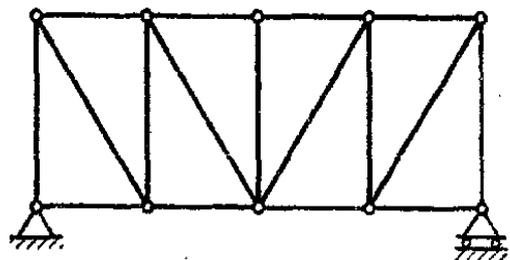
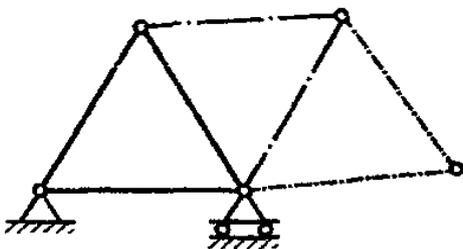
Размеры даны в сантиметрах.

## 5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

### *Понятие о ферме*

*Фермой* называется конструкция, состоящая из стержней, которые образуют геометрически неизменяемую систему.

Места соединения двух или более стержней фермы называют *узлами*. В приближенных расчетах можно допустить, что в узлах фермы находятся шарниры.



*Простейшей плоской фермой* является стержневой треугольник, содержащий три узла.

*Простая плоская ферма* получается из простейшей путем последовательного присоединения к ней каждого нового узла при помощи двух новых стержней.

Обозначим число стержней  $n$ , а число узлов —  $m$ . Тогда количество стержней, добавленных к простейшей ферме, равно  $n-3$ , а число добавленных узлов  $m-3$ . В соответствии с определением простой плоской фермы первое значение в два раза больше второго, следовательно,  $n-3 = 2 \cdot (m-3)$

$$n = 2m - 3.$$

Полученное выражение, отражающее связь между числом стержней и узлов, называют *формулой простой плоской фермы*.

### ***Допущения, применяемые при расчете ферм***

При расчете сил, действующих на узлы ферм, обычно исходят из следующих упрощающих предположений:

- внешние силы приложены только к узлам фермы;
- веса стержней пренебрежимо малы (их можно учесть, разнося по узлам соответствующих стержней);
- трение в шарнирах отсутствует.

При таких допущениях силы, действующие на узлы фермы со стороны стержней, всегда направлены вдоль линий, проходящих через концы стержней. Если стержни фермы прямолинейные, то они при этом либо растягиваются, либо сжимаются.

Для каждого из узлов плоской фермы, поскольку на них действуют системы сходящихся сил, могут быть составлены два уравнения равновесия. Поэтому их общее число  $2m$ . В свою очередь в простой плоской ферме неизвестными являются  $n$  реакций стержней и три реакции внешних связей. Таким образом, при числе стержней  $n = 2m - 3$  расчет сил может быть полностью выполнен методами статики.

При  $n < 2m - 3$  конструкция становится *геометрически изменяемой*.

Если  $n > 2m - 3$ , ферма *статически неопределима*.

Расчет ферм включает две задачи: определение реакций внешних связей и вычисление сил реакций стержней. Как правило, вначале вычисляются реакции внешних связей. К основным методам расчета внутренних сил относятся способы вырезания узлов и сечений.

### ***Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов***

Ферма может быть представлена как система тел – узлов, соединенных между собой связями – стержнями. Поэтому для ее расчета справедливы правила, изложенные в разделе равновесие систем тел. Поскольку на каждый узел действует система сходящихся сил, то для него могут быть составлены только два независимых уравнения равновесия, из которых можно найти только две неизвестные силы. В связи с этим расчет следует *начинать с того узла*, к которому приложены только *две неизвестные внутренние силы*.

Рассматривая узлы в таком порядке, чтобы в каждом последующем было не более двух неизвестных сил, выполняем расчет всех реакций внутренних связей. Причем, следует учитывать, что в соответствии с аксиомой о действии и противодействии силы, которыми стержень действует на взаимодействующие с ним уз-

лы, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Для удобства будем обозначать их  $\bar{s}_i$  и  $\bar{s}'_i$ .

**Замечание.** Для вычисления всех реакций стержней нет необходимости рассматривать все узлы. Последний узел может быть использован для проверки правильности решения.

Достоинство метода: он легко поддается программированию на ЭВМ.

Недостаток: накопленная погрешность и ошибка на начальной стадии расчета ведет к необходимости повторного полного перерасчета.

### ***Расчет простых плоских ферм способом сечений***

В качестве отдельного тела, составляющего ферму, может быть принята часть конструкции, включающая два узла и более. В этом случае внутренние силы, действующие между частями системы тел, уже не будут сходиться в одной точке. Для такой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия, из которых будут определены три неизвестные силы.

Причем, для получения уравнения с одной неизвестной силой составляют суммы моментов относительно точек пересечения линий действия двух других неизвестных реакций стержней. Если линии действия каких-либо двух сил параллельны, то составляется сумма проекций сил на ось, перпендикулярную указанным линиям действия.

Достоинство метода: можно определить силу реакции конкретного стержня, не рассчитывая другие внутренние силы.

### ***Графический метод определения внутренних сил в стержнях простой плоской фермы (метод Максвелла-Кремоны)***

Выше представлены аналитические способы расчета реакций стержней фермы. Однако при расчете ферм с большим количеством стержней их применение требует значительно больших затрат, чем использование графического метода, заключающегося в построении диаграммы Максвелла-Кремоны. Этот способ является графическим вариантом рассмотренного ранее способа вырезания узлов и состоит в построении замкнутых силовых многоугольников для каждого узла фермы. Его особенностью является метод обозначения сил. Он состоит в следующем. Место, занимаемое фермой, разбивается стержнями фермы и приложенными к ней внешними силами на области (зоны). Каждая сила тогда находится на границе зон и обозначается буквами, соответствующими названиям пограничных областей.

Построение диаграммы выполняется в следующем порядке.

1. Изображается в масштабе ферма, показываются все внешние силы (в том числе и определенные ранее реакции связей) с учетом их действительных направлений так, чтобы их векторы выходили за контур фермы.

2. Буквами обозначаются области, ограниченные линиями действия внешних сил и стержнями контура фермы.

3. Буквами обозначаются внутренние области, ограниченные стержнями фермы.

4. Строится силовой многоугольник внешних сил, приложенных к ферме. Записывается уравнение равновесия фермы в векторной форме: первое слагаемое соответствует одной из внешних сил, последующие получаются при обходе наружного контура фермы, например, *по ходу часовой стрелки*. В *масштабе* изображаются все векторы сил. Их начала и концы обозначаются буквами, соответствующими наименованиям зон. При правильном построении силовой многоугольник внешних сил должен быть *замкнутым*.

5. Выбирается узел, в котором имеется не более двух стержней, реакции которых неизвестны. Составляется уравнение его равновесия в векторной форме. Порядок следования векторов соответствует обходу узла *в принятом ранее направлении*. В соответствии с условием равновесия достраиваются недостающие стороны силового многоугольника.

6. Выполняются построения, описанные в пункте 5, до того момента, пока не будут определены все искомые силы. Полученная в результате построения фигура носит название диаграммы Максвелла-Кремонны.

Правильность ее построения проверяется по совпадению направлений линии действия последней определяемой внутренней силы и соответствующего стержня при рассмотрении предпоследнего узла.

7. Величины сил реакций стержней определяются путем измерения соответствующих отрезков на диаграмме и умножения на масштабный коэффициент.

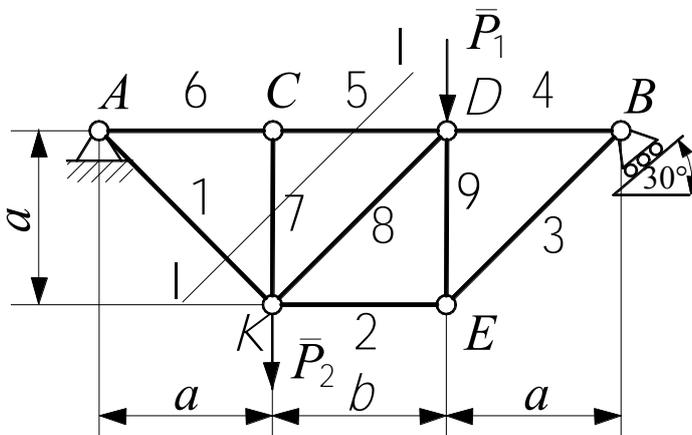
Чтобы определить, сжат либо растянут рассматриваемый стержень, необходимо проверить, куда направлен соответствующий вектор силы. Если сила, действующая на узел, направлена от узла фермы – стержень растянут; иначе – сжат.

## Вопросы и задачи

**5.1** Плоская ферма нагружена и закреплена так, как изображено на рисунке.

**Дано:**  $P_1 = 6$  кН,  $P_2 = 10$  кН,

$a = 3$  м,  $b = 4$  м.

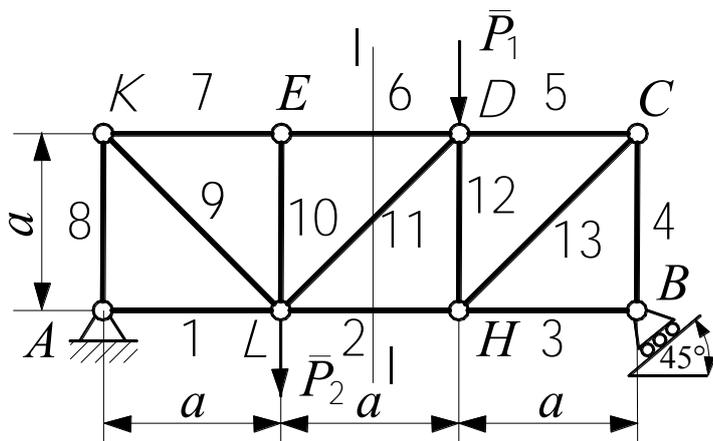


1. Назвать вид системы сил, приложенной к ферме.
2. Назвать типы связей в опорах  $A$  и  $B$ .
3. Для сечения I–I определить точки Риггера.
4. Методом сечения вычислить значение усилия в 5 стержне.
5. Методом вырезания узлов вычислить усилие во 2 стержне.

5.2 Плоская ферма нагружена и закреплена так, как изображено на рисунке.

Дано:  $P_1 = 20$  кН,

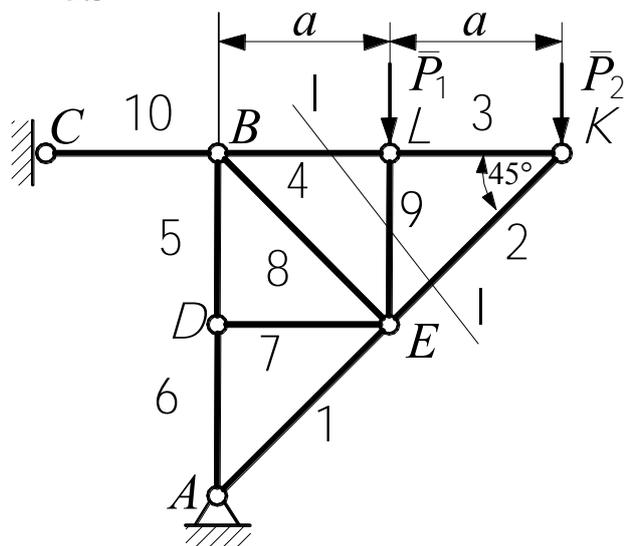
$P_2 = 40$  кН,  $a = 1$  м.



1. Назвать типы связей в  $A$  и  $B$ . Показать на чертеже реакции связей.
2. Определить является ли ферма статически определимой?
3. Определить точки Ригтера для сечения I-I.
4. Методом сечения вычислить значение усилия во 2 стержне.

5. Методом вырезания узлов вычислить усилие в 9 стержне.

5.3



Дано:  $P_1 = 20$  кН,  $P_2 = 60$  кН,

$a = 2$  м.

1. Назвать типы связей в  $A$  и  $B$ . Показать на чертеже реакции связей.
2. Найдите соотношения между количеством узлов и стержней.
3. Какие допущения принимают при расчет фермы.
4. Для сечения I-I укажите точки Ригтера.
5. Определите усилие в 4 стержне используя между сечений.

## ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ ЗАДАЧ

### Пример 2.2.1

1.  $F \sin \alpha \sin 45^\circ a = 1386 \text{ Н} \cdot \text{см}$
2.  $F \sin \alpha \sin 45^\circ a$ .
3.  $-F \cos \alpha \cdot a \cdot \sqrt{2/2} = -980 \text{ Н} \cdot \text{см}$

### Пример 2.2.2

1.  $m_x(\bar{F}_1) = -F_1 \sin \beta \cdot a = -429 \text{ Н} \cdot \text{см};$   
 $m_x(\bar{F}_2) = F_2 \cos \alpha \cdot a + F_2 \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} = 803 \text{ Н} \cdot \text{см}$
2.  $m_y(\bar{F}_1) = F_1 \sin \beta \cdot \frac{a}{2} + F_1 \cos \beta \cdot a = 429 \text{ Н} \cdot \text{см};$   $m_y(\bar{F}_2) = 0.$
3.  $m_z(\bar{F}_1) = -F_1 \cos \beta \cdot a = -215 \text{ Н} \cdot \text{см};$   $m_z(\bar{F}_2) = 0.$

### Пример 2.2.3

По формулам (1)–(8):

1.  $b \cdot F \cdot \cos \gamma.$
2.  $-a \cdot F \cdot \cos \gamma.$
3.  $a \cdot F \cdot \cos \beta - b \cdot F \cdot \cos \alpha.$

### Пример 2.2.4

1.  $F_1 \sin \alpha \cdot AD + F_3 \cos 45^\circ AA_1 = 803 \text{ Н} \cdot \text{см}$
2.  $F_3 \cos 45^\circ AA_1 = 636 \text{ Н} \cdot \text{см}$
3.  $-F_1 \cos \alpha \cdot AD - F_3 \cos 45^\circ AD = 535 \text{ Н} \cdot \text{см}$
4.  $F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha + F_3 \cos 45^\circ = 16 \text{ Н}$
5.  $-F_3 \cos 45^\circ = -21 \text{ Н}$
6.  $F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha = -8 \text{ Н}$

### Пример 2.2.5

1. Клюбому.
2. Нет.
3. Главный вектор  $R = F\sqrt{2}$ ;  $\cos(\bar{R}; \bar{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos(\bar{R}; \bar{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos(\bar{R}; \bar{k}) = 0.$

4. ГлавнЫй момент  $M_A = 3a \cdot F$ ;  $\cos(\bar{M}_A, \bar{i}) = -\frac{2}{3}$ ;  $\cos(\bar{M}_A, \bar{j}) = -\frac{1}{3}$ ;

$$\cos(\bar{M}_A, \bar{k}) = \frac{2}{3}.$$

5.  $M_C = aF\sqrt{5}$ .

6. Нет, т.к. главнЫй вектор  $\neq 0$ .

### Пример 2.2.6

1. ГлавнЫй вектор  $R = 200$  Н;  $\cos(\bar{R}', \bar{i}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos(\bar{R}', \bar{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos(\bar{R}', \bar{k}) = 0$ .

2.  $M_x = \sum m_x(\bar{F}_i) = 0$ ;  $M_z = \sum m_z(\bar{F}_i) = -F_1 \cdot \cos 45^\circ a = -28,3$  Н·м

3.  $M_A = 28,3$  Н·м, направлен вдоль оси  $Z$  в сторону отрицательных значений.

4. Да, т.к.  $R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z = 0$  (см. приложение к 2.2).

### Пример 2.2.7

1. ГлавнЫй вектор  $R = 40$  Н, направлен от  $A$  к  $C$ .

2.  $M_A = \sum m_A(\bar{F}_i) = -F_3 \cdot AD - m = -620$  Н·м, направлен по ходу стрелки часов.

3. Силы можно заменить равнодействующей, т.к. главнЫй вектор  $R \neq 0$ .

### Пример 3.1.1

1. Узел  $D$ . Реакция вдоль невесомых стержней (см. 1.4.4). Их принято направлять от узла

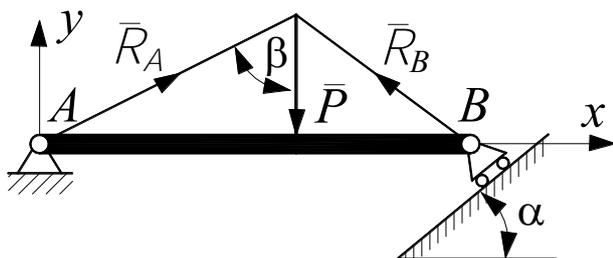
2. Пространственная система сходящихся сил.

3.  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $-R_A \cos \beta + R_B \cos \beta = 0$ ;  $\sum F_{iy} = 0$ ,  $-2R_A \sin \beta \cos \alpha - R_C \cos \gamma = 0$ ;  
 $\sum F_{iz} = 0$ ,  $-2R_A \sin \beta \sin \alpha - Q - R_C \sin \gamma = 0$ . При проектировании реакций  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  на оси  $Oy$  и  $Oz$  необходимо вначале спроецировать их на плоскость  $ZOy$ , а затем – на соответствующую ось.

4.  $R_C = \frac{2R_A \sin \beta \cos \alpha}{\cos \gamma}$ ;  $R_A = R_B = \frac{Q}{2 \sin \beta (\sin \alpha - \cos \alpha \tan \gamma)}$ .

Знак (–) указывает на то, что реакции  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$  направлены к узлу.

### Пример 3.1.2

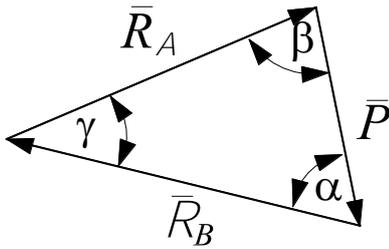


1.  $A$  – шарнирно-неподвижная опора,  $B$  – шарнирно-подвижная опора.

2. Теоремы о трех силах.

3. Плоская система сходящихся сил  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$ .

4.

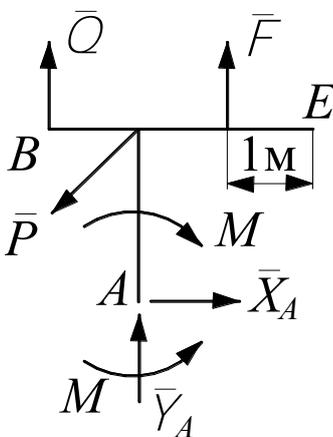


$$\frac{P}{\sin \gamma} = \frac{R_B}{\sin \beta} \Rightarrow R_B = \frac{P \sin \beta}{\sin \gamma} = 4\sqrt{2} \text{ кН}$$

5.  $\sum F_{ix} = 0; R_A \sin \beta - R_B \sin \alpha = 0;$

$\sum F_{iy} = 0; R_A \cos \beta - P + R_B \cos \alpha = 0; R_B = 4\sqrt{2} \text{ кН}$

### Пример 3.2.2



1. Т-образную балку  $ABE$ .

2. Равнодействующая  $F = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 3 = 3 \text{ кН}$ .

Прикладывается на расстоянии  $\frac{1}{3} BE$  от  $q_{\max}$ .

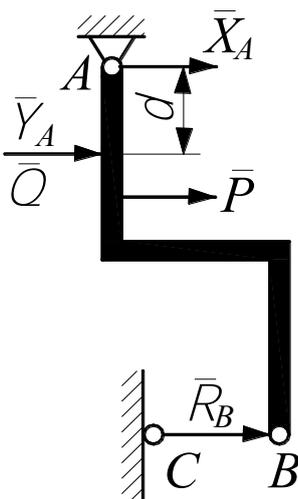
3. Плоская произвольная система сил. Аналитическим условием равновесия является:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum m_A(\bar{F}_i) = 0.$$

4.  $\sum m_A(\bar{F}_i) = 0.$

$$-Q \cdot 1 + P \sin \alpha \cdot 4 - M - F \cdot 1 + M_A = 0, M_A = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

### Пример 3.2.3



1. Раму.

$$d = \frac{a+b}{2}; y_A = 0.$$

2.  $Q = q(a+b)$ , т.к. все силы

3. Плоская система параллельных сил. Для определения  $\bar{X}_A$  и  $\bar{R}_B$  необходимо составить два уравнения равновесия.

4.  $\sum m_A(\bar{F}_i) = 0.$

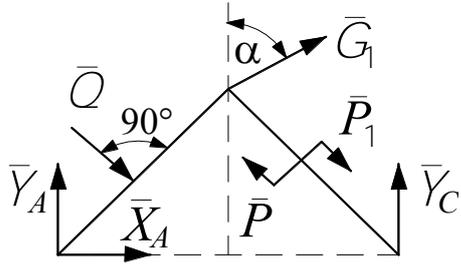
$$Q \frac{a+b}{2} + P \cdot a + R_B(a+b+c) = 0.$$

$$R_B = -\frac{Q(a+b) + 2Pa}{2(a+b+c)}.$$

Знак “-” указывает на то, что реакция  $\bar{R}_B$  направлена в противоположном направлении, показанном на рисунке.

### Пример 3.2.4

1.  $A$  – шарнирно-неподвижная опора;  $C$  – шарнирно-подвижная опора.
2. Алгебраическим моментом пары сил:  $M = M(P, P) = -P \cdot A = -60 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .
- 3.
4. Плоская произвольная система сил.



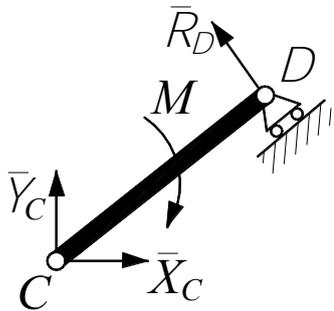
$$\sum m_A(\bar{F}_i) = -Q \frac{AB}{2} + G_1 \cos \alpha \cdot AB \cos \beta - G_1 \sin \alpha \cdot AB \cdot \sin \beta - Pa + Y_C \cdot AB \cos \beta = 0.$$

$$|\bar{G}_1| = |G|.$$

### Пример 3.2.5

1. Расчленение на части.

2.



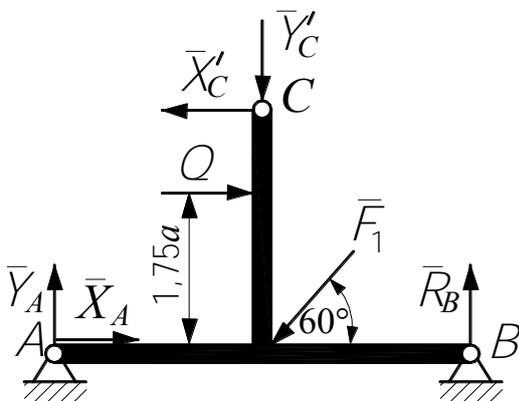
Для стержня  $CD$ .

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$R_D \cdot 2a\sqrt{2} - M = 0;$$

$$R_D = \frac{M}{2a\sqrt{2}}.$$

3.



Для части  $ACB$

$$\sum F_{ix} = 0, \quad X_A + Q - F_1 \cos 60^\circ - X'_C = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad Y_A - F_1 \sin 60^\circ + R_B - Y'_C = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_i) = 0;$$

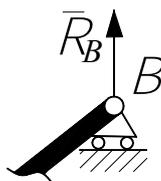
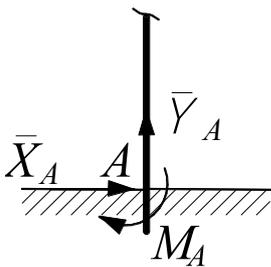
$$R_B \cdot 4a - F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a - Q \cdot 1,75a - Y'_C \cdot 2a + X'_C \cdot 2,5 = 0,$$

где  $Q = q \cdot 2,5a$ .

4.  $m_D(\bar{F}_1) = -F \cos 60^\circ \cdot 4,5a + F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a$  (см. 1.3).

### Пример 3.2.6

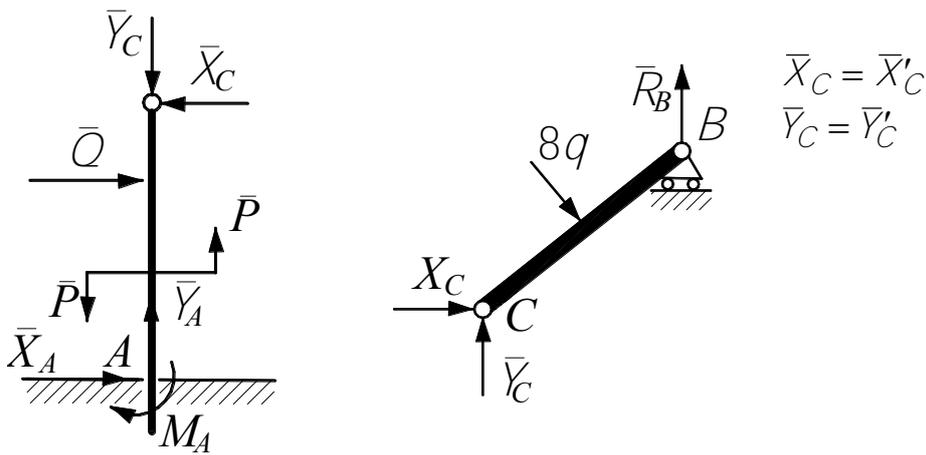
1.



$A$  – жесткая заделка.

$B$  – шарнирно-подвижная опора.

2.



3. На AC:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0, \quad X_A + Q - X_C = 0; \\ \sum F_{iy} = 0, \quad Y_A - Y_C = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_i) = 0, \\ -M_A + P \cdot 0,5 - Q \cdot 2 + X_C \cdot 3 = 0; \end{aligned}$$

На CB:

$$\begin{aligned} \sum m_C(\bar{F}_i) = 0, \\ -8q \cdot 4 + R_B \cdot 8 \cdot \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{iy} = 0, \quad Y'_C - 8q \cos \alpha + R_B = 0; \\ \sum F_{ix} = 0, \quad X'_C + 8q \sin \alpha. \end{aligned}$$

4. Из  $\sum m_A(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow R_B = 8 \text{ кН}$ .

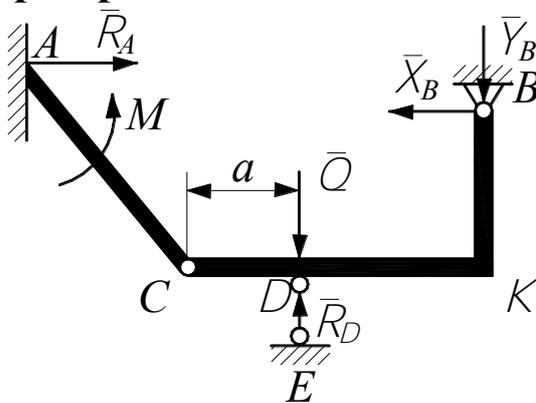
5. Из уравнения  $\sum m_A(\bar{F}_i) = 0$ , составленного для конструкции в целом. При этом внутренние силы в узле C не учитываются.

$$-M_A + 0,5P - Q \cdot 2 - 8q \cdot 4 \cos^2 \alpha - 8q \sin \alpha (3 + 4 \sin \alpha) + R_B 8 \cos \alpha = 0.$$

$$M_A = 36\sqrt{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

### Пример 3.2.7

1.

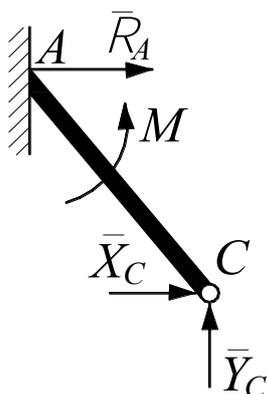


$$Q = \frac{6q_{\max}}{2} = 3q_{\max}.$$

$$a = \frac{1}{3} CK = 2 \text{ м}.$$

В точке A — гладкая плоскость;  
в точке D — невесомый стержень;  
в точке B — шарнирно-неподвижная опора.

2.



Следует расчленить систему тел по шарниру C и приложить к стержню AC силы так, как показано на рисунке. На стержень действует плоская произвольная система сил:

$$\sum m_C(\bar{F}_i) = -R_A \cdot 4 + M = 0;$$

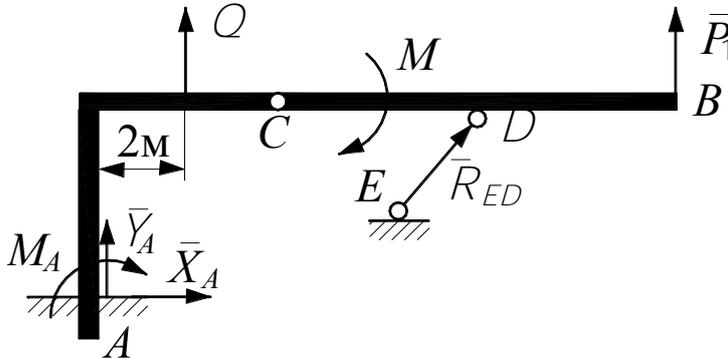
$$\sum F_{ix} = R_A + X_C = 0;$$

$$\sum F_{iy} = Y_C = 0.$$

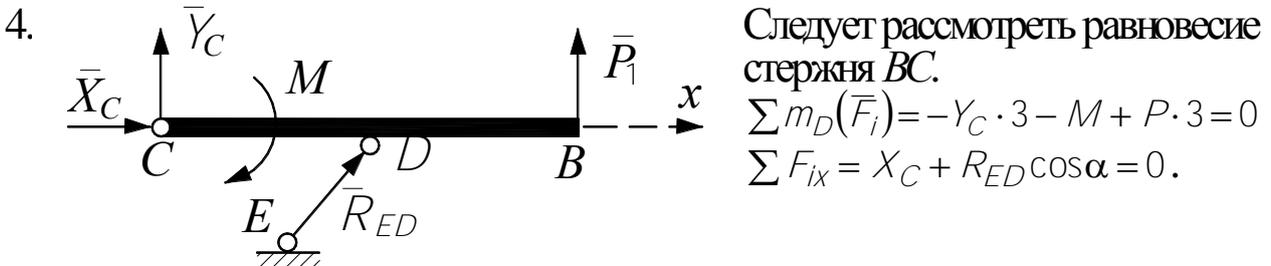
3. Следует рассмотреть равновесие всей конструкции  
 $\sum m_C(\bar{F}_i) = 0; -R_A \cdot 2 + M + Q \cdot 4 - R_D \cdot 4 = 0.$

### Пример 3.2.8

1. Внешние и внутренние, активные и реактивные.  
 2.



3. Необходимо расчлнить конструкцию по шарниру C. Для стержня BC  
 $\sum m_C(\bar{F}_i) = 0; -M + R_{ED} \sin \alpha \cdot 3 + P_1 \cdot 6 = 0.$



5. Для всей конструкции  $\sum m_A(\bar{F}_i) = 0;$   
 $-M_A - Q \cdot 2 - M + R_{ED} \sin \alpha \cdot 7 - R_{ED} \cos \alpha \cdot 4 + P \cdot 10 = 0.$

### Пример 3.2.9

1. A — шарнирно-неподвижная опора;  
 C — скользящая заделка.
- 2.

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН.}$$

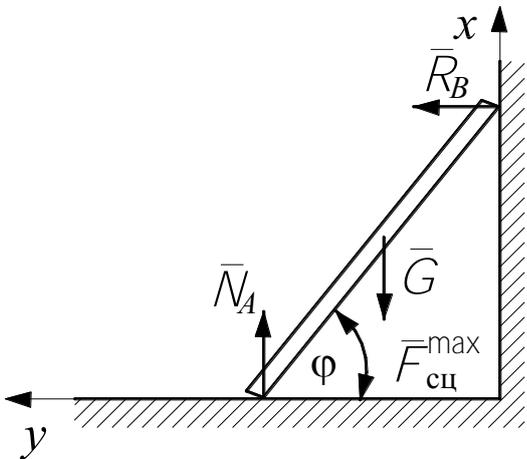
4M Q R\_C 6M C

6M M\_C

3.  $\sum F_{ix} = 0, -P \cos 30^\circ + x_B - x_A = 0;$   
 $\sum F_{iy} = 0, -P \sin 30^\circ + y_B + y_A = 0;$   
 $\sum M_C(F_{ix}) = 0, P \sin 30^\circ \cdot 9 - P \cos 30^\circ \cdot 4 - y_B \cdot 6 + x_B \cdot 4 + M = 0;$   
 $\sum F_{ix} = 0, -x_B + Q = 0;$   
 $\sum F_{iy} = 0, -y_B + R_C = 0;$   
 $\sum M_C(F_{ix}) = 0, x_B \cdot 6 + y_B \cdot 4 - Q \cdot 2 + M_C = 0.$
4. Находим усилие в промежуточном шарнире  $B$   $x_B = 12$  кН;  $y_B = 17,77$  кН.  
 Находим давление в опорах  $A$  и  $C$   $x_A = 3,58$  кН;  $y_A = -8,77$  кН;  
 $R_C = 17,77$  кН;  $M_C = -154,64$  кН·м.

### Пример 3.3.1

1.  $\bar{R}_B \perp$  плоскости стены.
2. Из уравнения  $\sum m_A(\bar{F}_i) = R_B / \sin \varphi - G \frac{l}{2} \cos \varphi = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow R_B = \frac{G \operatorname{ctg} \varphi}{2}.$



3. Дополнительно к предыдущему уравнению составим  
 $\sum F_{ix} = N_A - G = 0 \Rightarrow N_A = G;$   
 $\sum F_{iy} = R_B - F_{\text{сц}}^{\max} = 0 \Rightarrow R_B = F_{\text{сц}}^{\max} = fG$   
 или  
 $\frac{G}{2} \operatorname{ctg} \varphi = fG \Rightarrow \operatorname{ctg} \varphi = 2f \Rightarrow \varphi = \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} 2f.$
4. Невозможно, т.к. в этом случае в т.  $A$

будет только составляющая  $\bar{N}_A$  и  $\bar{R}_B = 0$ . Поэтому две силы  $\bar{N}_A$  и  $\bar{G}$  не могут уравновесить друг друга, т.к. не лежат на одной прямой.

### Пример 3.3.2

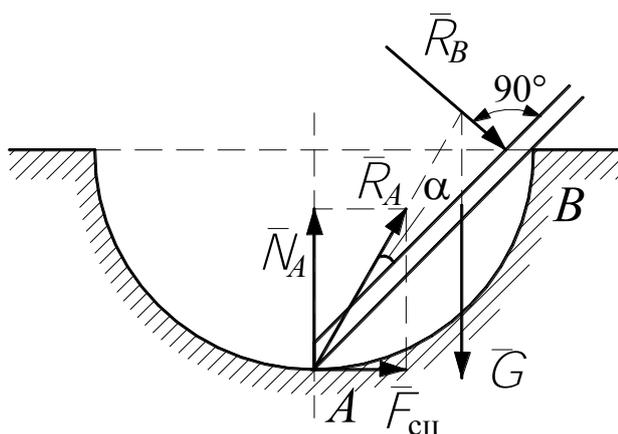
1.  $\sum F_{iy} = N + P \sin \beta - G \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = G \cos \alpha - P \sin \beta.$
2.  $F_{\text{сц}} = fN = f(G \cos \alpha - P \sin \beta).$
3. При  $P_{\max}$  наибольшая сила трения покоя направлена вниз. Из уравнения равновесия  $\sum F_{ix} = P_{\max} \cos \beta - F_{\text{сц}} - G \sin \alpha = 0$  или

$$P_{\max} \cos \beta - f(G \cos \alpha - P_{\max} \sin \beta) - G \sin \alpha = 0 \Rightarrow P_{\max} = \frac{G(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

4. При  $P_{\min}$  наибольшая сила трения покоя направлена вверх. Тогда из

$$\sum F_{ix} = P_{\min} \cos \beta + F_{\text{цт}} - G \sin \alpha = 0 \Rightarrow P_{\min} = \frac{G(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

### Пример 3.3.3



1.  $\bar{R}_B \perp AB$  (см. 1.4.1).

2. На основании теоремы о равновесии 3-х сил  $\bar{R}_A$  проходит через точку пересечения сил  $\bar{G}$  и  $\bar{R}_B$ .

3. Из уравнения  $\sum m_B(\bar{F}_i) = 0$ ;

$$-N_A \frac{3}{4} / \cos 45^\circ + N_A f \frac{3}{4} / \sin 45^\circ + G \frac{1}{4} / \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_A = \frac{G}{3(1-f)}.$$

4. Угол сцепления  $\varphi_{\text{цт}}$  — это угол между  $\bar{N}_A$  и  $\bar{R}_A$  в предельном положении покоя. Тогда  $\varphi_{\text{цт}} = 45^\circ - \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между  $\bar{R}_A$  и стержнем.

$$\text{tg} \alpha = KB / AB = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18^\circ 24'; \quad f_A = \text{tg} \varphi_{\text{цт}} = \text{tg} 26^\circ 36' = 0,5.$$

### Пример 3.3.4

1. Равновесие рычага  $OA$ .

2.  $\sum m_B(\bar{F}_i) = 0$ .

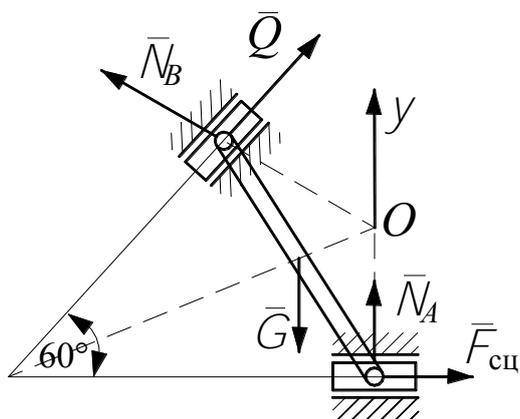
3.  $N'a - P \cos \alpha (a+b) = 0 \Rightarrow N' = \frac{P(a+b) \cos \alpha}{a}$ , где  $\bar{N}'$  — реакция шкива, направленная вверх,  $\perp OA$ . Сила  $\bar{N}$  равна по величине  $\bar{N}'$  и направлена ей противоположно.

4. Для определения  $P_{\min}$  составим сумму моментов приложенных к барабану сил относительно оси вращения

$$F_{\text{цт}}^{\max} \cdot R - G \cdot r = 0; \quad F_{\text{цт}}^{\max} = f N_{\min} = \frac{f P_{\min} (a+b) \cos \alpha}{a}.$$

$$\text{Тогда } P_{\min} = \frac{Gra}{fR(a+b) \cos \alpha}.$$

### Пример 3.3.5



1. Сила трения направлена в противоположную сторону движения ползуна, которое определяется направлением вращения стрежня под действием сил  $\bar{Q}$  и  $\bar{G}$ . Для определения этого составим сумму моментов этих сил относительно точки пересечения нормальных реакций.

$$\sum m_O(\bar{F}_i) = G \frac{l}{2} \sin 30^\circ - Q \frac{l}{2} \frac{1}{\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{Gl}{4} - \frac{Ql}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \text{вращение — по часовой стрелке, а движение ползуна — вле-}$$

во.

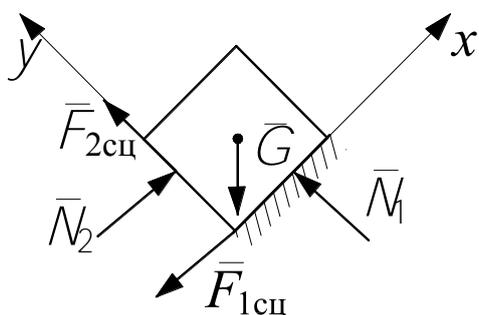
2.  $\sum m_A(\bar{F}_i) = G \frac{l}{2} \sin 30^\circ + N_B / \sin 30^\circ - Q / \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow N_B = 14,6 \text{ Н}$

3.  $\sum F_{iy} = N_A + Q \cos 30^\circ + N_B \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow N_A = 15,4 \text{ Н}$

4.  $\sum m_O(\bar{F}_i) = \frac{Gl}{2} \sin 30^\circ + F_{\text{сц}} \frac{l}{2 \cos 30^\circ} - Q \frac{l}{2 \cos 30^\circ} = 0.$

$$F_{\text{сц}} = 2,7 \text{ Н}; \quad f = \frac{F_{\text{сц}}}{N_A} = 0,18.$$

### Пример 3.3.6



Для определения  $N_1$  и  $N_2$  рассмотрим равновесие крайнего кубика:

$$\sum F_{ix} = N_2 - F_{1\text{сц}} - G \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = N_1 - F_{2\text{сц}} - G \cos 45^\circ = 0;$$

$$F_{1\text{сц}} = f N_1; \quad F_{2\text{сц}} = f N_2. \text{ Тогда}$$

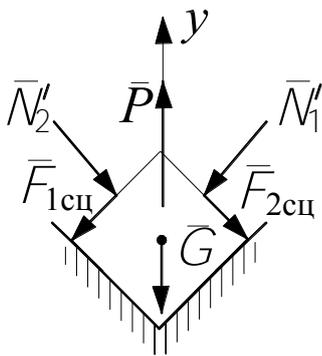
$$N_2 - f N_1 - G \cos 45^\circ = 0; \tag{1}$$

$$N_1 + f N_2 - G \cos 45^\circ = 0. \tag{2}$$

Решив совместно (1) и (2), получим:

1.  $N_1 = G \cos 45^\circ \frac{1-f}{1+f^2};$

2.  $N_2 = G \cos 45^\circ \frac{1+f}{1+f^2}.$



$$3. \frac{N_1}{N_2} = 1,5.$$

4. Давление кубика на плоскости в момент подъема отсутствует, т.е. между кубиком и плоскостями нет никаких сил. Из уравнения  $\sum F_{iy} = 0$

$$P - G - 2N_2' \cos 45^\circ - 2N_2' f \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 26 \frac{1 + f + f^2}{1 + f^2}.$$

### Пример 3.3.7

Значение сил  $\bar{P}$  и  $\bar{N}$  найдем из решения уравнений равновесия катка  $\sum F_{iy} = P \cos 30^\circ r - N \cdot \delta = 0$ ;  $\sum m_K(\bar{F}_i) = P \cos 30^\circ \cdot r - N \cdot \delta = 0$ .

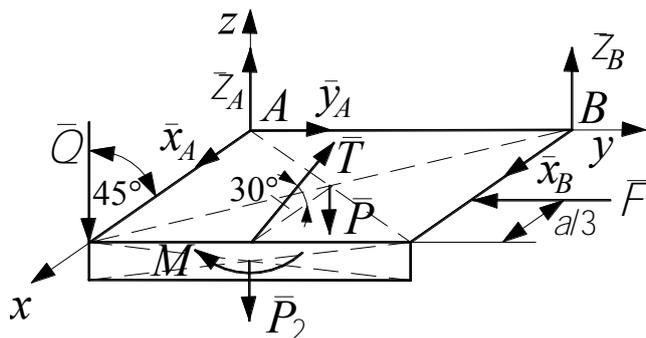
$$1. P = \frac{\delta G}{r \cos 30^\circ + \delta \sin 30^\circ} = \frac{500}{0,458} = 1093 \text{ Н}$$

$$2. N = G - P \sin 30^\circ = 10000 - 1093 \cdot 0,5 = 9453,5 \text{ Н}$$

$$3. F_{\text{сц}}^{\text{max}} = fN = 0,2 \cdot 9453,5 = 1891 \text{ Н}$$

4. Так как  $P \cos 30^\circ = 1093 \cdot 0,866 < F_{\text{сц}}^{\text{max}}$ , то скольжение будет отсутствовать.

### Пример 3.4.1



$$1. F = \frac{1}{2} q_{\text{max}} \cdot BC = \frac{1}{2} qa.$$

2. Конструкция из двух плит.

3. См. рисунок.

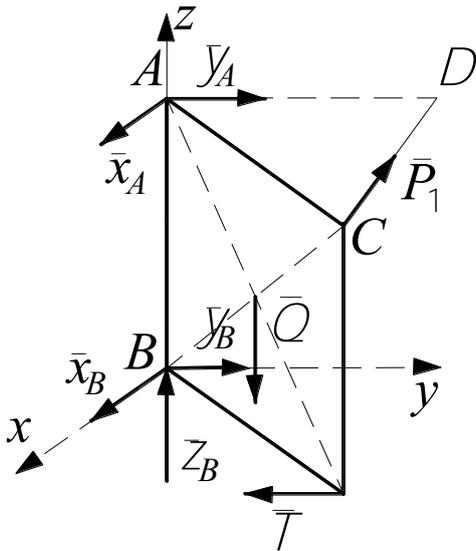
$$4. \sum m_y(\bar{F}_i) = 0;$$

$$Q \sin 45 \cdot a - T \sin 30^\circ \cdot a +$$

$$+ P_1 \frac{a}{2} + P_2 \cdot a = 0.$$

$$5. \sum m_y(\bar{F}_i) = 0; z_B \cdot b \cdot P_1 \frac{b}{2} - P_2 \frac{b}{2} + T \sin 30^\circ \cdot \frac{b}{2} - M = 0.$$

### Пример 3.4.2



1. Дверь.
2. Подпятник  $B$ , подшипник  $A$ , веревка  $EF$ .  
 $\bar{P}_1$  – вдоль  $CD$ .  $|\bar{P}_1| = |\bar{P}|$ .
3. Пространственная система произвольно расположенных сил.
4.  $\sum m_z(\bar{F}_i) = 0$ ;  
 $P_1 \cdot AC \cos 30^\circ - T \cdot BE \cos 30^\circ = 0$ ;  $T = F$ .
5.  $m_x(\bar{P}_1) = -P_1 \cos 60^\circ \cdot AB = -44 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .
6.  $\sum z_i = 0$ ,  $z_B - Q = 0$ ,

### Пример 3.4.3

1. Реакция подпятника имеет три составляющие:  $\bar{x}_A$ ,  $\bar{y}_A$  и  $\bar{z}_A$ . Реакция цилиндрического подшипника раскладывается на две составляющие:  $\bar{x}_B$  и  $\bar{y}_B$ .
2. Под действием пространственной произвольной системы сил.
3.  $\sum F_{ix} = 0$ ;  $\sum m_x(\bar{F}_i) = 0$ ;  
 $\sum F_{iy} = 0$ ;  $\sum m_y(\bar{F}_i) = 0$ ;  
 $\sum F_{iz} = 0$ ;  $\sum m_z(\bar{F}_i) = 0$ ;
4.  $\sum F_{ix} = 0$ ;  $x_A + x_B - T \cos 30^\circ = 0$ ;  
 $\sum F_{iy} = 0$ ;  $y_A + P + y_B + t + T \cos 60^\circ = 0$ .
5.  $\sum m_y(\bar{F}_i) = 0$ ;  $x_B(a+b) - T \cos 30^\circ(a+b+c) - QR \sin 45^\circ = 0$ .

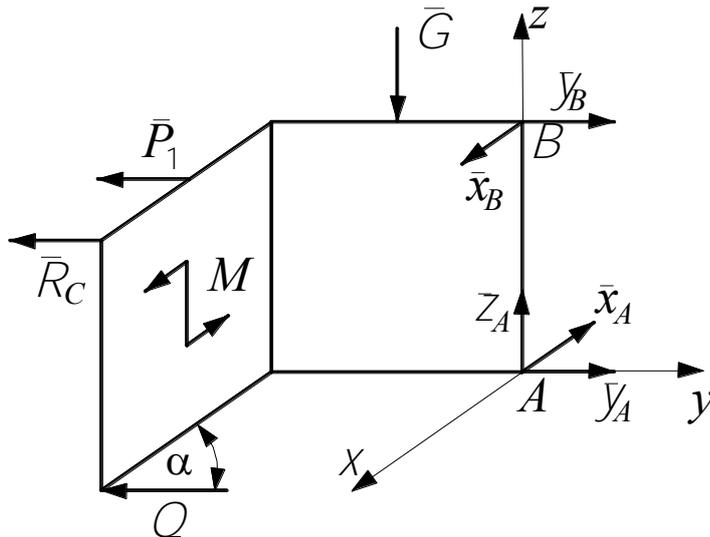
### Пример 3.4.4

1. Опорная реакция в сферическом подшипнике разлагается на три составляющие по осям координат:  $\bar{x}_A$ ,  $\bar{y}_A$  и  $\bar{z}_A$ . Реакция цилиндрического подшипника раскладывается на две составляющие:  $\bar{x}_B$  и  $\bar{y}_B$ . Реакция невесомого стержня направлена по стержню  $\bar{R}_{CD}$ .
2. Пространственная произвольная система сил.  
 $\sum F_{ix} = 0$ ;  $\sum F_{iy} = 0$ ;  $\sum F_{iz} = 0$ ;  
 $\sum m_x(\bar{F}_i) = 0$ ;  $\sum m_y(\bar{F}_i) = 0$ ;  $\sum m_z(\bar{F}_i) = 0$ .
3.  $\sum F_{iy} = 0$ ;  $y_B + y_A + P \cos \beta - q \cdot a - R_{CD} \cos \alpha = 0$ ;  
 $\sum F_{iz} = 0$ ;  $z_B + z_A + -G - P \cos \gamma + R_{CD} \sin \alpha = 0$ .

4.  $\sum m_x(\bar{F}_i)=0; R_{CD}(\cos\alpha \cdot b + \sin\alpha \cdot c) + q \cdot a \cdot b - P\cos\beta \cdot b = 0.$
5.  $\sum m_z(\bar{F}_i)=0; y_B \cdot a - q \frac{a^2}{2} - M + P\cos\beta \cdot a = 0.$
6.  $M_y(\bar{P}) = -P\cos\beta \cdot b + P\sin\beta \cdot a.$

### Пример 3.4.5

1.  $B$  – цилиндрический шарнир;  $A$  – подпятник;  $DC$  – невесомый стержень.



2.  $G = q \cdot B; |\bar{P}| = |\bar{P}|;$

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_i) &= 0; \\ -R_C \cdot a - P_1 \frac{a}{2} - Q \sin\alpha \cdot a + \\ &+ Q \cos\alpha \cdot b = 0. \end{aligned}$$

4.  $\sum m_y(\bar{F}_i)=0; x_B \cdot c + M = 0; x_B = -\frac{M}{c}.$

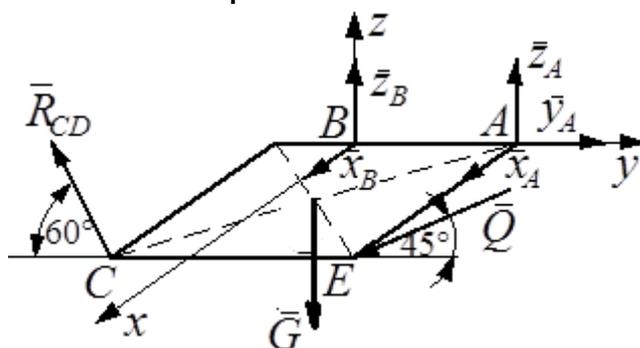
Составляющая  $x_B$  имеет направление, противоположное показанному на чертеже.

5.  $\sum F_{ix}=0; z_A - G = 0; z_A = G.$

### Пример 3.4.6

1. Рама  $AECF$ . Связями являются: петля в т.  $B$ , сферический шарнир в т.  $A$  и невесомый стержень  $CD$ .

2.

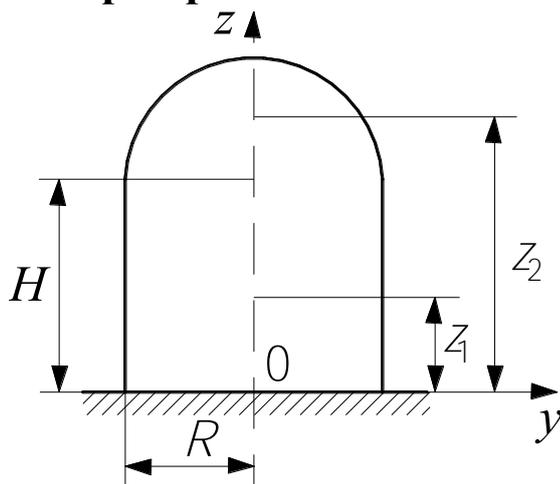


3. Пространственная система произвольно расположенных сил.

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; & \sum m_x(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; & \sum m_y(\bar{F}_i) &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0; & \sum m_z(\bar{F}_i) &= 0; \end{aligned}$$

4.  $\sum m_y(\bar{F}_i)=0; G \cdot \frac{a}{2} - R_{CD} \sin 60^\circ \cdot a = 0; R_{CD} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ кН}.$

### Пример 4.1



$$1. z_1 = H + \frac{3}{8} R = 43 \text{ см.}$$

2. Разобьем все тело на полушар (1) и цилиндр (2):

$$z_C = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i} = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2}{V_1 + V_2};$$

$$z_2 = \frac{H}{2}; \quad V_2 = \pi R^2 H; \quad V_1 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

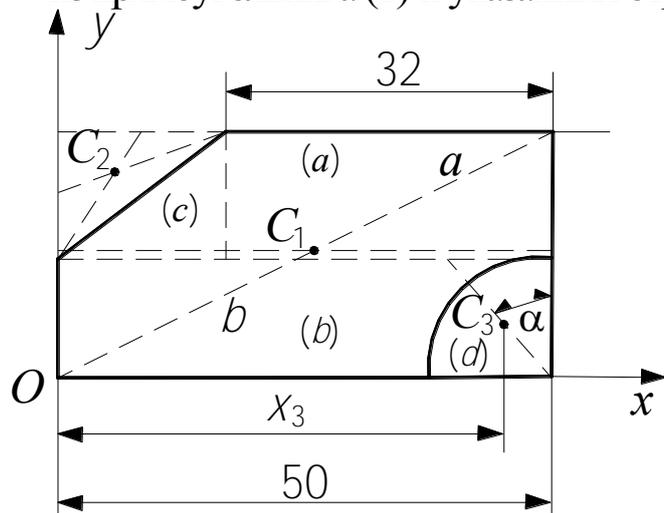
После подстановки и преобразований получим

$$z_C = \frac{6H^2 + 8HR + 3R^2}{12H + 8R} = 28,14 \text{ см.}$$

3. Будет, т.к. центр тяжести всего тела лежит внутри полушара ( $z_C > H$ ). В этом случае нормальная реакция плоскости, проходящая через центр основания полушара, и сила тяжести тела будут возвращать тело, если его вывести из вертикального положения, в это положение.

### Пример 4.2

1. Методом разбиения в сочетании с методом дополнения. Первый способ: дополним фигуру четвертью круга (3) и треугольником (2), считая дополненные площади отрицательными. Тогда фигуру можно представить состоящей из прямоугольника (1) и указанных отрицательных площадей.



Второй способ: дополним фигуру только четвертью круга и разобьем на два прямоугольника (a) и (b), треугольник (c) и четверть круга (d).

2. Центр тяжести отсеченного треугольника (2) находится на пересечении медиан

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \text{ см;}$$

$$y_2 = 12 + \frac{2}{3} \cdot 13 = 20,67 \text{ см.}$$

$$3. x_3 = 50 - \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos 45^\circ = 50 - \frac{2}{3} \cdot 12 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 44,9 \text{ см;}$$

$$y_3 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos 45^\circ = \frac{2}{3} 12 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,1 \text{ см.}$$

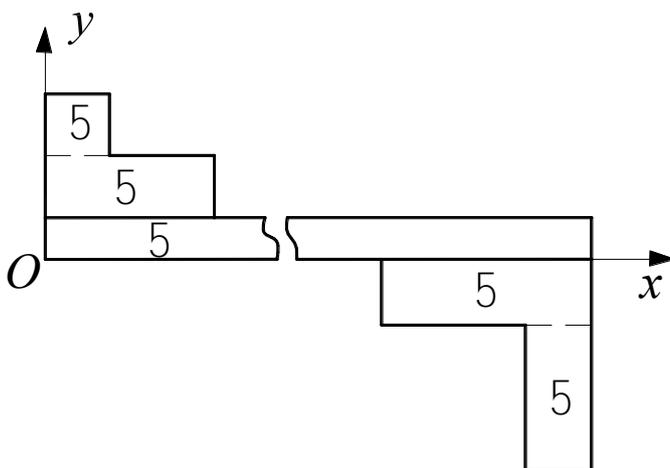
4. Воспользуемся первым описанным способом:

$$x_C = \frac{x_1 F_1 + x_2 (-F_2) + x_3 (-F_3)}{F_1 + (-F_2) + (-F_3)} = \frac{25 \cdot 25 \cdot 50 - 6 \cdot 13 \cdot 9 - 44,9 \frac{3,14 \cdot 12^2}{4}}{25 \cdot 50 - \frac{1}{2} 18 \cdot 13 - \frac{3,14 \cdot 12^2}{4}} =$$

$$= \frac{25475}{1020} = 24,97 \text{ см;}$$

$$y_C = \frac{y_1 F_1 + y_2 (-F_2) + y_3 (-F_3)}{F_1 + (-F_2) + (-F_3)} = \frac{12,5 \cdot 1250 - 20,67 \cdot 117 - 5,1 \cdot 113}{1250 - 117 - 113} = 12,38 \text{ см.}$$

### Пример 4.3



Разобьем фигуру на пять прямоугольников, как указано на рисунке

1.

$$\begin{aligned} S_x &= \sum y_i F_i = y_1 F_1 + y_2 F_2 + \\ &+ y_3 F_3 + y_4 F_4 + y_5 F_5 = \\ &= 17,5 \cdot 5 \cdot 15 + 7,5 \cdot 5 \cdot 70 - \\ &- 2,5 \cdot 5 \cdot 20 - 17,5 \cdot 5 \cdot 25 = 875 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

2.  $S_y = \sum x_i F_i = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + x_4 F_4 + x_5 F_5 = 2,5(5 \cdot 15) + 15 \cdot (5 \cdot 30) + 35 \cdot (5 \cdot 70) + 60 \cdot (5 \cdot 20) + 67,5 \cdot (5 \cdot 25) = 29125 \text{ см}^3.$

3.  $x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{29125}{800} = 36,4 \text{ см;}$   $y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{875}{800} = 1,09 \text{ см.}$

4. Статические моменты при таком выборе осей координат равны нулю.

### Пример 4.4

1.  $x_1 = R = 20 \text{ см;}$   $y_1 = R \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = 20 \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 12,74 \text{ см.}$

$$2. x_3 = 90 - R \frac{\sin \alpha_3}{\alpha_3} \cos 45^\circ = 90 - 20 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 77,26 \text{ см};$$

$$y_3 = R \frac{\sin \alpha_3}{\alpha_3} \cos 45^\circ = 20 \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12,74 \text{ см}.$$

$$3. x_C = \frac{\sum x_i/l_i}{\sum l_i} = \frac{x_1/l_1 + x_2/l_2 + x_3/l_3 + x_4/l_4 + x_5/l_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i/l_i}{\sum l_i} = \frac{y_1/l_1 + y_2/l_2 + y_3/l_3 + y_4/l_4 + y_5/l_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}.$$

Подставим  $x_1 = 20 \text{ см}; x_2 = 55 \text{ см}; x_3 = 77,26 \text{ см}; x_4 = 100 \text{ см}; x_5 = 110 \text{ см};$   
 $y_1 = 12,74 \text{ см}; y_2 = 0; y_3 = 12,74 \text{ см}; y_4 = 20 \text{ см}; y_5 = 10 \text{ см};$

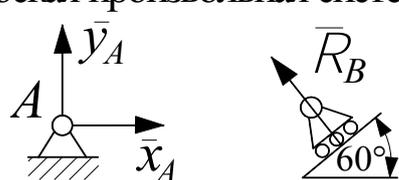
$$l_1 = \pi R = 3,14 \cdot 20 = 62,8 \text{ см}; l_2 = 30 \text{ см}; l_3 = \frac{1}{2} \pi R = 31,4 \text{ см}; l_4 = 20 \text{ см};$$

$$l_5 = 20 \text{ см}.$$

Получим:  $x_C = 58,05 \text{ см}; y_C = 10,96 \text{ см}.$

### Пример 5.1

1. Плоская произвольная система сил.

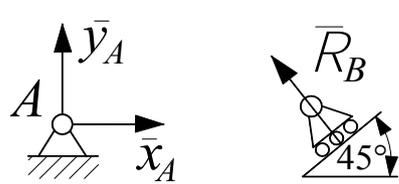
2.   $A$  – шарнирно-неподвижная опора  
 $B$  – шарнирно-подвижная опора.

3.  $A, C, K.$

$$4. \sum m_K(\bar{F}_i) = 0; S_5 \cdot 3 - R_1 \cdot 4 + R_B \cos 60^\circ \cdot 7 + R_B \sin 60^\circ \cdot 3 = 0; S_5 = -32,5 \text{ кН}.$$

$$5. S_2 = 10 \text{ кН}.$$

### Пример 5.2

1.   $A$  – шарнирно-неподвижная опора  
 $B$  – шарнирно-подвижная опора.

$$2. S = 2n - 3; 13 = 2 \cdot 8 - 3. \text{ Статически определимая. Узлов} - 8. \text{ Стержней} - 13$$

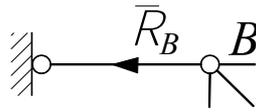
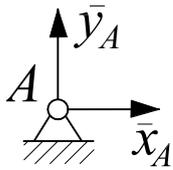
3.  $L, D.$

$$4. S_2 = 0.$$

$$5. S_9 = 47,14 \text{ кН}.$$

### Пример 5.3

1.



$A$  – шарнирно-неподвижная опора  
 $B$  – невесомый шарнирно-закрепленный стержень.

2.  $S = 2n - 3$ ;  $9 = 2 \cdot 6 - 3$ . Узлов – 6. Стержней – 9.

3. Стержни невесомые, шарнирно закрепленные. Силы прикладывают к узлам.

4.  $E$ ,  $L$ ,  $K$

5.  $\sum m_E(\bar{F}_i) = 0$ ;  $S_4 \cdot a - P_2 \cdot a = 0$ ;  $S_4 = P_2 = 60$  кН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общей ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 735 с.
2. Добронравов В.В., Никипин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроительных специальностей вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. – 12-изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика. Учебное пособие для технических вузов./ Яблонский А.А., Никифорова В.М. – 8-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2001. – 764 с.
5. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Оседкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1968. – 419 с.
6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Динамика. – М.: Наука, 1985. – 559 с.
7. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учебно-методическое пособие по теоретической механике / Г.Н. Алехнович, Т.Ф. Богинская, Ю.В. Василевич и др. – Мн.: БГПА, 1997. – 88 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для вузов. – 3-е изд. испр. под ред. проф. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – 388 с.
9. Исследование методов решения задач по теоретической механике: Учебно-методическое пособие для студентов высших технических учебных заведений. В 3 ч. / Г.И. Беляева, С.И. Миткевич, С.Г. Дрозд, И.С. Куликов. – Мн.: БГПА, 1999. – Ч. 1: Статика. – 102 с.
10. Теоретическая механика. Ч.1. Статика. Учебное пособие / Сост. А.О. Ши-мановский / Белорусский гос. университет трансп. – Гомель: БелГУТ, 1988 – 72 с.