УДК 537.86

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ДИАГРАММ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Сироткин А.И.
Научный руководитель – Трофименко Е.Е., к.ф-м.н., профессор

Традиционно при описании колебательных процессов применяется 2 метода: динамический и энергетический [1]. Первый метод предполагает составление дифференциального уравнения, описывающего данное колебание, и нахождение его решения с учётом заданных начальных условий. Зная закон изменения колеблющейся величины, можно найти её значение в любой момент времени. При решении задач вторым методом необходимо составить уравнения законов сохранения энергии и импульса данной колебательной системы и решить их в системе. Это даёт возможность найти кинематические (перемещение, амплитуда, скорость) или физические (масса системы) параметры колебательной системы.

Однако часто решение задач на колебания вышеуказанными способами является достаточно громоздким и длинным, так как требует решение сложной системы уравнений. В этом случае более удобной может оказаться графическая интерпретация колебаний – фазовая диаграмма. Она представляет собой график параметрически заданной функции вида (1):

$$\begin{cases} x = f(t), \\ \frac{dx}{dt} = g(t); \end{cases} \tag{1}$$

где: x – колеблющаяся величина; t – время; f и g – законы изменения величин x и $\frac{dx}{dt}$ [2]. График может получиться самым разнообразным и зависит от характера закона изменения колеблющейся величины. Например, можно показать, что для гармонического незатухающего колебания фазовая диаграмма – это эллипс, где одной полуосью является амплитуда колебаний, а второй – скорость колеблющейся величины [3]. С помощью построения фазовой диаграммы колебательной системы можно намного быстрее определить период колебаний, фазу колебательной системы в определённый момент времени, время затухания колебаний и т.д.

Графическая интерпретация колебаний может оказаться полезной и при рассмотрении более сложных видов колебательных систем, например, при изучении электромагнитных колебаний. Процессы, происходящие в колебательных контурах, состоящих из катушки индуктивности, конденсатора и активного сопротивления (R-L-C-контуры), широко используются на практике в электротехнике и радиоэлектронике [3].

Рассмотрим дифференциальное уравнение свободных затухающих электромагнитных колебаний [2] в R-L-C-контуре (2):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0; \qquad (2)$$

где: q – электрический заряд; β – коэффициент затухания; ω_0 – начальная циклическая частота колебаний. Будем считать, что в начальный момент времени вся энергия колебаний была сосредоточена в конденсаторе. Тогда можно получить решение уравнения (2) в следующем виде:

$$q = q_{0m}e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,; \qquad (3)$$

где: q_{0m} – изначальный заряд конденсатора; φ_0 – начальная фаза колебаний. Если продифференцировать выражение (3) по времени, то можно получить закон колебания силы тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_{0m}e^{-\beta t}[-\beta\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega\sin(\omega t + \varphi_0)]; \qquad (4)$$

Используя метод вспомогательного угла, выражение (4) можно преобразовать к следующему виду:

$$I = q_{0m}e^{-\beta t}\omega_0\,\cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi) \qquad (5)$$

где: $\Delta\varphi$ – разность фаз между колебаниями силы тока и заряда. Можно строго доказать, что $\Delta\varphi\epsilon(\frac{\pi}{2};\pi)$, т.е. сила тока опережает по фазе заряд на угол, более 90°. Это означает, что сила тока принимает своё максимальное значение в момент времени, когда конденсатор ещё полностью не разрядился. Данный факт значительно усложняет поиск максимумов силы тока традиционными методами ввиду того, что определить промежуток времени, когда сила тока в контуре максимальна, достаточно затруднительно.

Задачу о нахождении максимумов силы тока при затухающих электромагнитных колебаниях удобно решать методом фазовых диаграмм. Её можно построить по формулам (3) и (4), подставив в них соответствующие численные значения. Для примера зададимся такими исходными данными: $q_{0m} = 2$ Кл; $\beta = 0{,}2\frac{1}{\text{с}}$; $\omega = 4\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varphi_0 = 0$. Фазовая диаграмма таких колебаний, построенная с помощью компьютерной программы представлена на рисунке 1. Она представляет собой скручивающуюся к центру спираль, повёрнутую по отношению к координатным осям. На рисунке 1 наглядно показано, что максимумы силы тока в колебательной системе происходят в те моменты времени, когда заряд на конденсаторе ещё не равен нулю. Изменяя масштаб фазовой диаграммы, можно приближать определённые области и определять значения заряда и силы тока в рассматриваемых точках. В данном примере получаются следующие результаты: максимальная сила тока при первом колебании $|I_{m1}| = 7{,}41\,A$, при втором – $|I_{m2}| = 6{,}35\,A$, при третьем – $|I_{m3}| = 5{,}43\,A$. С построенной фазовой диаграммы можно также снять значения максимального заряда, накапливающегося в конденсаторе при последующих колебаниях. Однако данная задача решается довольно просто и аналитическими методами.

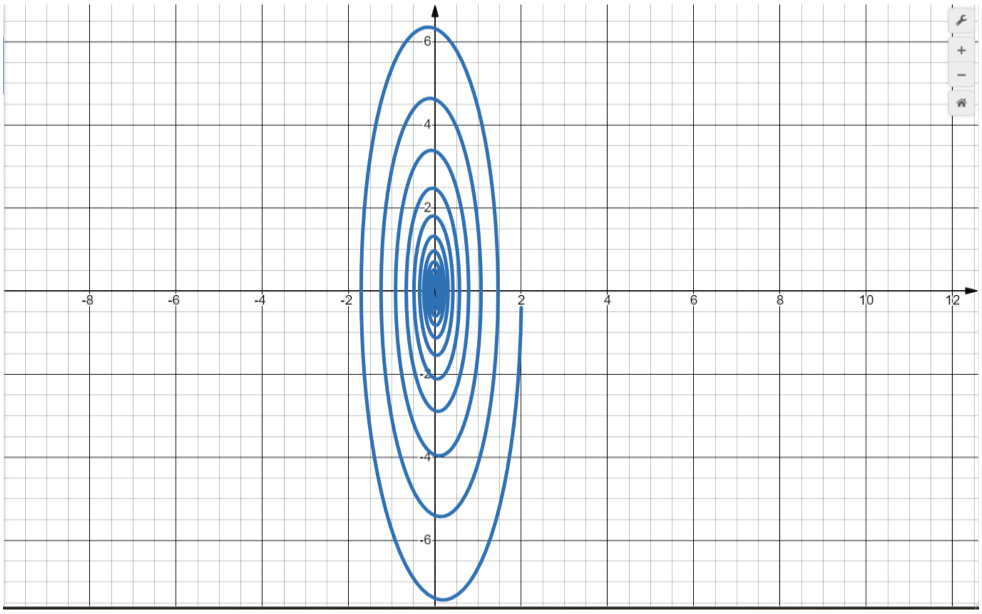

Рис. 1. Фазовая диаграмма свободных затухающих электромагнитных колебаний

Изучая характер фазовых диаграмм свободных затухающих электромагнитных колебаний при различных начальных данных, были также установлены следующие закономерности:

- при изменении начального заряда q_{0m} изменяется диаметр витков спирали;
- при изменении коэффициента затухания β изменяется количество витков спирали;
- при изменении циклической частоты колебаний ω изменяется плотность витков спирали;
- при изменении начальной фазы колебаний φ_0 изменяется расположение спирали относительно начала координат.

Таким образом, метод фазовых диаграмм является удобным, наглядным, а в некоторых случаях и более рациональным способом решения задач на колебания [1].

Литература

1. Белов, Ф Фазовые диаграммы колебательных систем / Ф. Белов // Квант. – 2021. – № 9. – С. 29–31.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики: Учебник для студ. вузов / В.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1985. – 432 с.
3. Савельев, В.И. Курс общей физики: в 3 томах / В.И. Савельев. – М.: Наука, 1970. – 1 том.