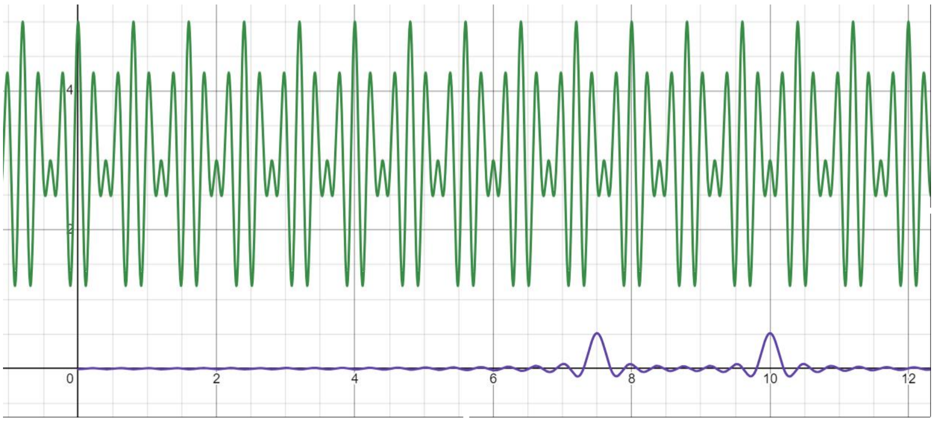

Рис. 2. Пример применения анализа Фурье при решении практической задачи

Таким образом преобразование Фурье находит широкое применение в самых различных сферах.В системах электропривода анализ Фурье может использоваться для оценки гармонических составляющих тока и напряжения, для диагностики неисправностей в электродвигателях, при проектировании систем электропривода анализ Фурье может использоваться для определения оптимальных параметров регуляторов и фильтров,и т. п.

УДК 004.942

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВМАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Поддубный А. В.
Научный руководитель —Воронович Г.К., к.т.н., доцент

Основным расчетным методом, позволяющим с большой точностью определять температурное и напряженное состояния в детали любой конфигурации при любых условиях нагружения в настоящее время является метод конечных элементов (МКЭ), который относится к категории сеточных вариационных методов. Основная идея МКЭ состоит в том, что решение какой-либо задачи математической физики отыскивается с использованием дискретной модели, построенной на множестве кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена в пределах заданной подобласти. Каждая из этих подобластей называется конечным элементом.

Основные принципы МКЭ:

1. **Дискретизация**: Область, в которой решается задача, разбивается на конечное число элементов.
2. **Аппроксимация**: Решение задачи внутри каждого элемента аппроксимируется с помощью простых функций, например, полиномов.

3. **Формулировка системы уравнений**: На основе физических законов и граничных условий для каждого элемента формулируются уравнения.

4. **Сборка глобальной системы уравнений**: Уравнения для всех элементов объединяются в единую систему уравнений, которая описывает поведение всей системы.

5. **Решение системы уравнений**: Полученная система уравнений решается численными методами, например, методом Гаусса. **Анализ напряжений и деформаций в конструкциях:**

Основная часть.Рассмотрим применение МКЭ на расчете температурного состояния ДВС. Распространение теплоты в изотропном твердом теле может быть описано уравнением теплопроводности $\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = 0$ (1), а граничные условия задачи в общем виде $T\big|_{S=S_1} = T^*$; $\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z + q + \alpha(T - T_\infty) = 0$ (2), где T — распределение температуры; λ_x, λ_y, λ_z — коэффициенты теплопроводности; Q — объемное выделение теплоты; S— область на которой задана фиксированная температура T^*, S_1 — область на которой заданы тепловые потоки в виде граничных условий второго и третьего рода.

С вариационной точки зрения решение уравнения будет: $X = \int\limits_V \frac{1}{2}\left[\lambda_x (\frac{\partial T}{\partial x})^2 + \lambda_y (\frac{\partial T}{\partial y})^2 + \lambda_z (\frac{\partial T}{\partial z})^2 + QT\right]dV + \int\limits_S \left[qT + \frac{1}{2}\alpha(T - T_\infty)^2\right]dS$ (3).

Для нахождения искомых значений необходимо осуществить процедуру минимизации функционала по узловым значениям температур $\{T_1\}$, введенным на множестве узловых точек конечно-элементной разбивки области.

Далее необходимо выполнить введение в рассмотрение матриц производных температуры по глобальным координатам $\left\{\frac{\partial T}{\partial x_j}\right\}^T = \left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right]$ (4)и, пользуясь основным соотношением МКЭ $T^{(e)} = \sum_{i=1}^{M} N_i^{(e)} T_i$, преобразуем это выражение $\left\{\frac{\partial T}{\partial x_j}\right\}^T = \left[\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i, \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i, \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial N_i}{\partial z} T_i\right]$ (5).

В матричном виде, это выражение будет $\left\{\frac{\partial T}{\partial x_j}\right\}^{(e)} = \left[\frac{\partial N_t}{\partial x_j}\right]^{(e)} [T]$ (6). Обозначим через $[B]$матрицу производных функций формы по глобальным координатам. Тогда исходный вариационный функционал может быть представлен в виде суммы отдельных функционалов $X^{(e)}$, заданных на элементе *e*, причем каждый из них можно записать как

$$X^{(e)}=\int_{V^e}\frac{1}{2}[T]^T\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]^T\left[B^{(e)}\right][T]dV+\int_{V^e}Q\left[N^{(e)}\right][T]dV+\int_{S_2^{(e)}}q\left[N^{(e)}\right][T]dS+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{S_2^{(e)}}\alpha[T]^T\left[N^{(e)}\right]^T\left[N^{(e)}\right][T]dS-\int_{S_2^{(e)}}\alpha T_\infty\left[N^{(e)}\right][T]dS+\int_{S_2^{(e)}}\frac{\alpha}{2}T_\infty^2 dS \qquad (7)$$

Для минимизации этого функционала нужно продифференцировать его по вектору узловых значений температуры и приравнять полученное выражение к нулю, продифференцировав каждый член функционала по $\{T\}$

$$\int_{V^{(e)}}\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]dV[T]+\int_{V^{(e)}}Q\left[N^{(e)}\right]dV+\int_{S_2^{(e)}}q\left[N^{(e)}\right]dS+$$
$$+\int_{S_2^{(e)}}\alpha\left[N^{(e)}\right]^T\left[N^{(e)}\right]dS-\int_{S_2^{(e)}}\alpha T_\infty\left[N^{(e)}\right]dS=0 \qquad (8)$$

Конкретный вид векторов функций формы и их производных будет зависеть от типа рассматриваемой задачи и от выбора элементов.

Плоская область. В этом случае матрицы

$$\left[B^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x},\frac{\partial N_2}{\partial x},\ldots,\frac{\partial N_M}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y},\frac{\partial N_2}{\partial y},\ldots,\frac{\partial N_M}{\partial y}\end{bmatrix};\left[D^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_x,0\\ 0,\ \lambda_y\end{bmatrix}.$$

Тогда характерный элемент матрицы теплопроводности элемента a_{ij}, стоящий на пересеченииі*i*-го столбца и *j*-ой строчки будет:

$$a_{ij}=\lambda_x\frac{\partial Ni}{\partial x}\frac{\partial Nj}{\partial x}+\lambda_y\frac{\partial Ni}{\partial y},\frac{\partial Nj}{\partial y}\ (9).$$

Трехмерная область. В этом случае матрица производных функций формы может быть записана как $\left[B^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x},\frac{\partial N_2}{\partial x},\ldots,\frac{\partial N_M}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y},\frac{\partial N_2}{\partial y},\ldots,\frac{\partial N_M}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial z},\frac{\partial N_2}{\partial z},\ldots,\frac{\partial N_M}{\partial z}\end{bmatrix}$.

Матрица свойств материала имеет вид $[D]=\begin{bmatrix}\lambda_x & 0 & 0\\ 0 & \lambda_y & 0\\ 0 & 0 & \lambda_z\end{bmatrix}$.

Тогда характерный элемент будет иметь вид:

$$a_{ij}=\lambda_x\frac{\partial Ni}{\partial x}\frac{\partial Nj}{\partial x}+\lambda_y\frac{\partial Ni}{\partial y},\frac{\partial Nj}{\partial y}+\lambda_z\frac{\partial Ni}{\partial z}\frac{\partial Nj}{\partial z}\ (10).$$

Заключение.

МКЭ – это мощный инструмент для математического моделирования, позволяющий решать сложные задачи с высокой точностью. Его широкое применение в различных областях науки и техники свидетельствует о его эффективности и универсальности.

Литература

1. Петриченко Р. М. и др., Элементы системы автоматизированного проектирования ДВС: Алгоритмы прикладных программ: Учеб. пособие для студентов вузов по специальности «Двигатели внутреннего сгорания»/Р. М. Петриченко — Л.:Машиностроение. Ленинград. 1990.

УДК 51-74

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Праслов К.Д.
Научный руководитель – Королёва М.Н.
старший преподаватель кафедры «Высшая математика»

Математика представляет собой инструмент для решения различных задач, возникающих в других отраслях науки и в практической деятельности человека. Этим инструментом, как и любым другим, надо уметь пользоваться. Методы математической формализации и решения задач, возникающих в различных областях деятельности человека, называют математическим моделированием. Общепринятого определения этого термина не существует. На эмоциональном уровне можно сказать, что математическое моделирование — это искусство применять математику. В философском контексте математическое моделирование является одним из наиболее общих методов научного познания закономерностей создания и функционирования реальных объектов различной природы. В настоящей работе показаны основные методы математического моделирования и их применение в разных областях.

При решении задач методом математического моделирования объект, подлежащий изучению (реальная технологическая система, процесс, производственная ситуация, проектная задача и т.п.), заменяется математической моделью. Математическая модель представляет собой совокупность математических соотношений, отображающих взаимосвязь между существенными с точки зрения решаемой задачи параметрами объекта-оригинала. Математические соотношения могут представлять собой функциональные зависимости или логические соотношения. Окончательный вид формул и математических зависимостей между признаками объекта обычно называют математической моделью. Под признаками моделируемого объекта понимаются параметры его структуры, различные свойства, особенности и закономерности функционирования.