5. Кузнецов, С.М., Лукьянов, А.В., Черненко, О.В. (2018). Математическое моделирование тепловых процессов в энергосистемах. Издательство УРСС. ISBN: 978-5-9710-4364-4.

УДК 530.1+53; 51

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОСТИ И КОНСТРУКТИВНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ, СИММЕТРИИ И ОТНОШЕНИИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Н. Д. Рудаков, И. Г. Черенкевич
Научный руководитель – Н. Н. Роговцов, д.ф.-м.н., профессор

Преставления об инвариантности, симметрии и отношении эквивалентности используется в явной и неявной формах и практически во все сферах человеческой деятельности. Они, по сути, являются фундаментом многочисленных идей и их конструктивных реализаций в математике,физике,химии биологии и искусстве. Выделение в иногда кажущемся хаосе мира явлений и событий определенных элементов красоты и гармонии, на базе которых в течение достаточного длительного временного промежутка сформировались абстрактные идеи о красоте и симметрии, объективно можно рассматривать в качестве одного из эпохальных достижений человечества. Несмотря на свою абстрактность, указанные выше представления привели в XIX – XX веках к одним из наиболее грандиозных изменений в различных областях естествознания. Это в свою очередь за указанный период времени привело ко многим выдающимся научно-техническим достижениям, которые существенно преобразовали в глобальном масштабе человеческую цивилизацию. Следует особо отметить, что многие исходные идеи и их реализации, относящиеся к понятиям эквивалентности, инвариантности, симметрии и гармонии были высказаны, развиты и использованы наиболее интеллектуальными представителями человечества, ещё начиная с эпох позднего палеолита и бронзового века.

Материальными свидетельствами этого служат артефакты, которые представляют собой лунные и солнечно-лунные календари, зафиксированные на костях животных, руины архитектурных построек древних цивилизаций и некоторые инструменты, сделанные из бронзы. После наступления эпохи железного века (около 3-х тысяч лет тому назад) в странах Древнего Востока, Древней Греции и Римской Империи былипостроены великолепныеархитектурные сооружения и развиты уникальные ремесла (в частности, производство ковров), которые напрямую связаны с понятием симметрия. Одним из многих открытий Древних Греков является доказательство существования только пяти правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Однако достаточно чёткое понимание фундаментальности указанных выше представлений начало формироваться только со второй половины XIX века, в основном, в научных публикациях математиков, механиков и физиков. Осмысление важной роли и глубины этих представлений происходит до сих пор в различных сферах естествознания и искусства.

Дадим классические определения отношения эквивалентности и инварианта. Понятие отношения является одним из наиболее общих и важных математических понятий, которое отражает какую-либо связь между объектами, предметами, самими понятиями и т.д. Рассмотрим упорядоченную пару (a,b) в котором элемент a и b принадлежит некоторому множеству M. Вся совокупность таких пар принадлежит множеству $M \times M$ (это декартово произведение множество самого на себя). Под бинарным отношением σ понимается некоторое подмножество K множества $M \times M$. При этом, если пара $(a,b) \in K$, то говорят, что элемент aнаходится в отношениях σ к элементу b и пишут $a\sigma b$.Под отношением эквивалентности Kпринимают такое отношение σ на множестве M, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) Для любого $a \in M$имеет место $(a,a) \in K$(рефлексивность);
2) Если для любых $a,b \in M$ из $a\sigma b$ следует $b\sigma a$(симметричность);
3) Если для любых $a,b,c \in M$ из $a\sigma b$и $b\sigma c$следует верность $a\sigma c$(транзитивность).

Из этого определения следует, что с абстрактной точки зренияэлементы из множества M, связанные между собой отношенем σ обладают некоторыми общими свойствами. Данное свойство инвариантно (т.е. неизменно) по отношению к выбору этих элементов. Исходное множество Bможно разбить на классы эквивалентности; причём к каждому классу относятся только те элементы из B, которые связаны друг с другом отношением эквивалентности.

С учётом сказанного дадим классическое определение инварианта. Под инвариантом понимается отображение φ рассматриваемого множества B, снабжённое фиксированным отношением эквивалентности σ, в другое множество T, неизменные (постоянные) на классах эквивалентности множества Bпо σ (это инвариант отношения эквивалентного σ и это инвариант отношения эквивалентности на B). Если $x \in B$, то $\varphi(x)$ — инвариант элемента x. Множество T может иметь разнообразную сущность. В частности, оно может иметь смысл некоторой числовой системы.

Отметим, что исследование инвариантов связано с проблемами классификации объектов того или иного типа. Цель любой математической классификации состоит в построении системы инвариантов, которые по существу разделяют любые неэквивалентные объекты из множества рассматриваемых объектов.

При исследовании и выявлении свойств инвариантности, симметрии в математике, физике, математической физике и т.д. зачастую используется такое алгебраическое понятие, как группа. Множество Gназывается группой, если в этом множестве определена бинарная алгебраическая операция $\circ$, т.е. для любой пары элементов a, b из G становится в соответствие единственный элемент $a \circ b = c \in G$, причём верны такие аксиомы:

1) $(ab)\circ c = a\circ(bc)$для любых элементов $a,b,c \in G$(ассоциативность);

2) Существует единичный элемент $e \in G$, для которого $e \circ a = a \circ e = a$, для любого $a \in G$;

3) Для любого $a \in G$ существует единственный обратный элементa^{-1}, для которого верное равенство $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$;

При изучении свойств симметрии геометрических и иных тел очень используется, в частности, понятие симметрическая группа, которая является группой биективных преобразований (отображений) множества Bна себя.

Важную роль при изучении свойств симметрии каких-либо множеств объектов играют *автоморфизмы*. Во-первых, автоморфизм — биективное (взаимно-однозначное) отображение множества Mна себя. Во-вторых, множество всех автоморфизмов множества Вобразует группу его автоморфизмов. В-третьих, автоморфизмы дают возможность выявить некоторые сохраняющиеся количественные и качественныесвойства множеств и их подмножеств. Они позволяют установить взаимосвязь множества элементов, объектов и т.д. и его частей по отношению к самим себе. В частности, представление о симметрии абстрактных или реальных объектах (например, геометрических фигурах) основано на том факте, что при определённых преобразованиях (они образуют группу), фигура переходит сама в себя при определённых ограничениях (т.е. неизменности некоторых соотношений, ограничений, отношения при этом сохраняются). Это означает, что фигура допускает автоморфизм относительно своих свойств. В качестве таких свойств могут выступать: взаимное расположение её частей, расстояний, углов, упорядоченность, принадлежность и т.д. Подчеркнём, что чем больше свойств фигуры *сохраняется* при автоморфизмах фигуры, тем в большей степени она является симметричной. Особо отметим, что классификация геометрий (топология, проективная, аффинная, неевклидовая, подобия, движения и т.д.) основана на использовании групп преобразований, при которых геометрические объекты сохраняют свои свойства в рамках той или иной геометрии.

Особую роль представления об отношении эквивалентности, инвариантности и симметрии сыграли в классической и современной физике, включая классическую и квантовую механики, квантовую теорию поля, теорию элементарных частиц, кристаллографию, специальную и общую теорию относительности, статистическую механику. Более того, эти представления играют не последнюю роль при исследовании подобных процессов и теории размерностей в макроскопической физике. Подавляющая часть фундаментальных утверждений, выдвинутых в теоретической физике, имеет смысл принципов инвариантности, симметрии.

За последние десятилетия XX века и первые десятилетия XXI века значительная часть научного содержания Нобелевских премий, полученных учёными в области физики и химии, была основана на использовании различных конструктивных идей, непосредственно связанных с представлениями об инвариантности и симметрии, которые, по существу, констатируют или постулируют неизменность свойств,уже исследованных локальных и глобальных явлений по отношению к множествам реальных или мысленных операций или действий. В частности, принципы относительности Галилея и Эйнштейна являются фактически геометрическими принципами инвариантности (симметрии).

Кроме геометрических принципов инвариантности важную роль играют динамические принципы инвариантности, которые используются при исследовании различных типов взаимодействий в квантовых системах.

Литература

1. Роговцов, Н. Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. В 2-х ч.-Мн.: БГПА, 1999. –ч.1.-384 с.

УДК 517

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ПАНДЕМИИ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Латышенко К.Е.
Научные руководители – Рудый А.Н., к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Высшая математика»
Бань Л.В., старший преподаватель, кафедра «Высшая математика»

С начала времён одной из проблем человечества были болезни, поэтому прогнозирование хода болезни – один из инструментов борьбы с недугом.

В данной статье мы рассмотрим стохастическую модель распределения инфекции.