УДК 621.391.25

РЕШЕНИЕ СЛАУ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ ЛЕНТОЧНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЕЙ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

Каленик И. К., Петруша П. А.
научный руководитель – Напрасников В.В., к.т.н., доцент

Сначала определим, что представляет собой ленточная симметричная матрица. Это квадратная матрица, которая одновременно является и ленточной, и симметричной. Это означает, что все её ненулевые элементы расположены вдоль главной диагонали и в некотором количестве диагоналей над и под ней, и при этом элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали.

Метод прогонки применяется для решения систем линейных уравнений MX = W, где M – трехдиагональная матрица. Матрица называется трехдиагональной, если она имеет отличные от нуля элементы только на главной и двух примыкающих к ней диагоналях:

$$M = \begin{pmatrix} q_1 & r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 & r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & q_3 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & q_{n-1} & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n & q_n \end{pmatrix}$$

Подобные системы встречаются в различных областях вычислительной математики, и поэтому разработаны специальные методы для их решения.

Запишем трехдиагональную систему в виде равенств

$$p_i x_{i-1} + q_i x_i + r_i x_{i+1} = w_i,\ i = 1,2,\dots,n,\ p_1 = 0, r_n = 0.$$

Метод прогонки является частным случаем метода исключения Гаусса. Формулы прямого хода в этом случае значительно упрощаются, а выбор главных коэффициентов не нужен. В результате система приводится к виду

$$x_i = u_i x_{i+1} + v_i,$$

где коэффициенты u_i, v_i находятся по рекуррентным формулам

$$u_1 = \frac{-r_1}{q_1}, v_1 = \frac{w_1}{q_1},.$$

$$u_i = \frac{-r_i}{q_i + p_i u_{i-1}}, v_i = \frac{w_i - p_i v_{i-1}}{q_i + p_i u_{i-1}}, \qquad i = 2, \dots, n.$$

Обратный ход позволяет получить окончательное решение по формулам

$$x_n = v_n, x_i = u_i x_{i+1} + v_i\ , \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Если выполняются неравенства

$$|q_i| \geq |p_i| + |r_i|, |q_i| \geq |p_i|, i = 1,2, \dots n,$$

то решение трехдиагональной системы существует и единственно.

Общее количество арифметических операций, требуемое для реализации метода, приблизительно равно 8n. При этом диагональные элементы матрицы

$$M[m_{ij}], i, j = 1, \dots, n$$

можно хранить в виде трех отдельных векторов

$$P[p_i], Q[q_i], R[r_i], i = 1, \dots, n.$$

На следующих рисунках представлена программа в среде MATHCAD, реализующая решение описанной задачи.

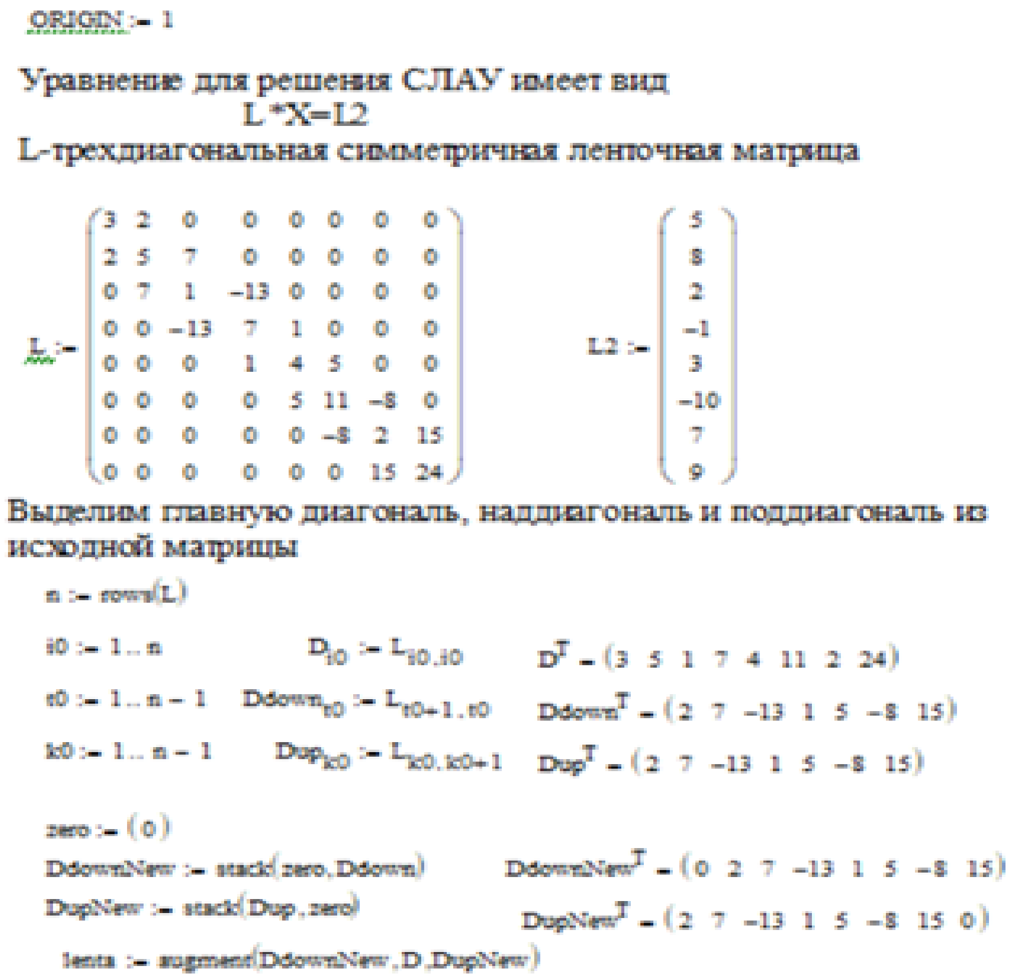

Рис.1. Отображение параметров, установленных пользователем.

После выполнения вычислений результат будет отображен на координатной оси выше и правее указанной точки поиска, а также в нижней части программы после координатной оси (рис. 2).

Сформируем ленту из диагоналей с помощью встроенной функции augment

$$lenta = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & -13 \\ -13 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 11 & -8 \\ -8 & 2 & 15 \\ 15 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Реализация метода прогонки

$$Progonka(lenta, L2) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow rows(L2) \\ U_1 \leftarrow \dfrac{-lenta_{1,3}}{lenta_{1,2}} \\ V_1 \leftarrow \dfrac{L2_1}{lenta_{1,2}} \\ \text{for } i \in 2..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} U_i \leftarrow \dfrac{-lenta_{i,3}}{lenta_{i,2} + lenta_{i,1} \cdot U_{i-1}} \\ V_i \leftarrow \dfrac{L2_i - lenta_{i,1} \cdot V_{i-1}}{lenta_{i,2} + lenta_{i,1} \cdot U_{i-1}} \end{array} \right. \\ X_n \leftarrow V_n \\ \text{for } i \in n-1..1 \\ \quad X_i \leftarrow U_i \cdot X_{i+1} + V_i \\ \text{return } X \end{array} \right.$$

Вычисление прогоночных коэффициентов (Прямой ход)

Вычисление решения системы (Обратный ход)

$$Progonka(lenta, L2)^T = (1.259 \;\; 0.611 \;\; 0.347 \;\; 0.202 \;\; 2.095 \;\; -1.116 \;\; 1.024 \;\; -0.265)$$

Вектор-строка решения уравнения с помощью метода прогонки

$$lsolve(L, L2)^T = (1.259 \;\; 0.611 \;\; 0.347 \;\; 0.202 \;\; 2.095 \;\; -1.116 \;\; 1.024 \;\; -0.265)$$

Вектор-строка решения уравнения с помощью встроенной функции

Рис.2. Результаты работы программы