4. Учебное пособие по программированию котроллеров в среде CODESys V.3.5
5. Руководство пользователя блока датчиков ФСТ-03В1

УДК 681.511

ПРОГРАММА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ КЛАССИЧЕСКИХ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Райкова Ю.Д.
Научный руководитель – к.т.н., доцент Несенчук А.А.

Метод корневого годографа [1, 2] представляет собой мощный метод синтеза и анализа систем в теории систем автоматического управления (САУ) [1]. В данной статье разрабатывается программа для реализации процедур анализа и синтеза динамических систем с постоянными параметрами и интервальных динамических систем с использованием метода корневого годографа. Программа разработана на языке C#.

1. Интервальные динамические системы

Характеристическое уравнение классической системы имеет вид

$$1 + KW_1(s)W_2(s) = 0,$$

где $W_1(s)$ – передаточная функция прямой цепи; $W_2(s)$ – передаточная функция звена обратной связи; K - общий коэффициент усиления системы; s – комплексный дифференциальный оператор [1].

Передаточную функцию разомкнутой системы представим в виде [2]

$$G(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{\psi(s)}{\phi(s)}, \tag{1}$$

где $\psi(s)$и $\phi(s)$ -полиномы от комплексного переменного s.

Тогда на основании (1) характеристическое уравнение системы перепишем в виде

$$p(s) = \phi(s) + K\psi(s) = 0.$$

Пусть варьируется общий коэффициент усиления в пределах всех действительных значений: $-\infty < K < +\infty$. Тогда уравнение корневого годографа в общем виде определяется следующей функцией отображения:

$$K = -\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma,\omega) + iv(\sigma,\omega), \tag{2}$$

где $u(\sigma,\omega)$ и $v(\sigma,\omega)$ - гармонические функции двух независимых переменных σ и ω.

Функция (2) позволяет отображать некоторые образы, заданные в плоскости K варьируемого параметра (*параметра годографа*) на *плоскость комплексного переменного* s и используется, таким образом, для формирования корневых годографов (корневых траекторий) в плоскости s [2].

Если параметр годографа изменяется вдоль всей действительной оси u плоскости K варьируемого параметра, годограф называется корневым годографом Теодорчика - Эванса (КГТЭ) [2]. Уравнение КГТЭ в данном случае имеет следующий вид:

$$v(\sigma,\omega) = 0. \qquad (3)$$

Выражение (3) позволяет определять корневые годографы при изменении параметра годографа K вдоль всей действительной оси u плоскости варьируемого параметра [2]: $-\infty < K < +\infty$.

Уравнение параметра КГТЭ имеет вид

$$K = u(\sigma,\omega). \qquad (4)$$

С использованием выражения (4) вычисляются значения параметра корневого годографа в любой точке корневого годографа.

Задача об устойчивости интервальных динамических систем, согласно В.Л. Харитонову [3], может быть сведена к решению задачи устойчивости четырёх классических систем на основе соответствующих характеристических полиномов, где в качестве моделей вспомогательных систем для динамической системы, заданной характеристическим полиномом

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+a_3s^{n-3}+a_4s^{n-4}+a_5s^{n-5}+a_6s^{n-6}+a_7s^{n-7}+ \ldots +a_{n-1}s+a_n = p(s), \qquad (5)$$

где a_j – действительные коэффициенты полинома, $j = 1, 2, \ldots, n$, изменяющиеся в интервалах

$$a_j \in [\underline{a}_j, \overline{a}_j] \qquad (6)$$

выступают следующие полиномы [3]:

$$s^n+ \underline{a}_1 s^{n-1}+ \underline{a}_2 s^{n-2}+ \overline{a}_3 s^{n-3}+ \overline{a}_4 s^{n-4}+ \underline{a}_5 s^{n-5}+ \underline{a}_6 s^{n-6}+ \overline{a}_7 s^{n-7}+ \ldots=h_1(s), \qquad (7)$$

$$s^n+ \underline{a}_1 s^{n-1}+ \overline{a}_2 s^{n-2}+ \overline{a}_3 s^{n-3}+ \underline{a}_4 s^{n-4}+ \underline{a}_5 s^{n-5}+ \overline{a}_6 s^{n-6}+ \overline{a}_7 s^{n-7}+ \ldots=h_2(s), \qquad (8)$$

$$s^n+ \overline{a}_1 s^{n-1}+ \underline{a}_2 s^{n-2}+ \underline{a}_3 s^{n-3}+ \overline{a}_4 s^{n-4}+ \overline{a}_5 s^{n-5}+ \underline{a}_6 s^{n-6}+ \underline{a}_7 s^{n-7}+ \ldots=h_3(s), \qquad (9)$$

$$s^n+ \overline{a}_1 s^{n-1}+ \overline{a}_2 s^{n-2}+ \underline{a}_3 s^{n-3}+ \underline{a}_4 s^{n-4}+ \overline{a}_5 s^{n-5}+ \overline{a}_6 s^{n-6}+ \underline{a}_7 s^{n-7}+ \ldots=h_4(s). \qquad (10)$$

Если полиномы (7) – (10) являются устойчивыми, то устойчиво и все семейство (5), т.е. полином (5) является устойчивым по критерию устойчивости Гурвица. Для устойчивости полиномов (7) – (10) необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней этих полиномов были отрицательны. Если хотя бы один из этих полиномов имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью, все семейство (5) является неустойчивым.

Также Б. Андерсоном доказано [4], что для проверки устойчивости семейства полиномов степени n = 3 достаточно только одного полинома из (7) – (10), а для проверки устойчивости семейства полиномов степени n = 4 – только двух полиномов из (7) – (10).

При n = 3 используется следующий полином:

$$s^3 + \underline{a}_1 s^2 + \underline{a}_2 s + \overline{a}_3 = h_1(s). \qquad (11)$$

При n = 4 используются следующие два полинома:

$$s^4 + \underline{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \overline{a}_3 s + \overline{a}_4 = h_1(s), \qquad (12)$$

$$s^4 + \overline{a}_1 s^3 + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s + \overline{a}_4 = h_1(s). \qquad (13)$$

Рассмотрим примеры построения корневых траекторий с целью анализа и синтеза динамических систем.

2. Программа для построения корневых годографов интервальных систем

Разработана программа с оконным интерфейсом, предназначенная для построения корневых годографов классических и интервальных динамических систем на языке C#. На ввод подаётся тип вводимых исходных данных и порядок системы. После нажатия на кнопку «Вывести поля» отображаются необходимые поля для ввода коэффициентов. По нажатию кнопки «Обработать функцию/полином» программа анализирует введённые данные, а после нажатия кнопки «Вывести годограф» отображается графическое изображение корневого годографа, при выборе интервальной системы – также вывод об устойчивости системы. Программа предназначена для базового анализа устойчивости САУ, заданных передаточными функциями либо характеристическими полиномами.

Пример 1. Динамическая система, описывается передаточной функцией разомкнутой системы вида

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \qquad (14)$$

Введя необходимые данные в разработанное программное средство, получим график КГТЭ, построенный на интервале [-10;5] с шагом 0.01 (рисунок 1).

Пример 2. Интервальная динамическая система, описывается характеристическим полиномом вида

$$p(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4, \qquad (15)$$

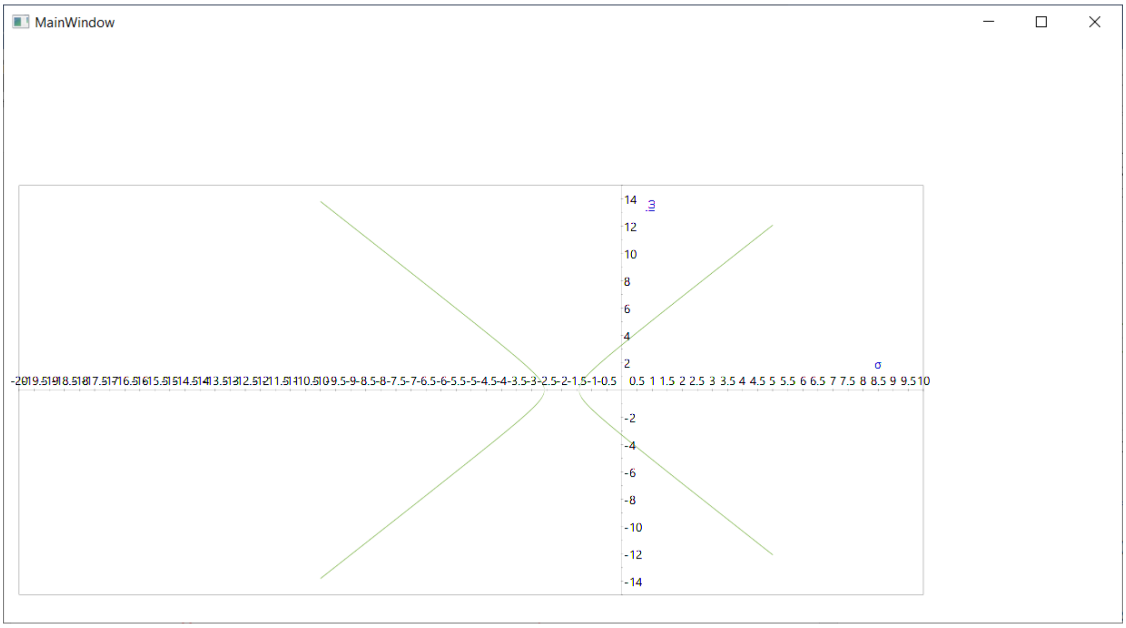

Рис. 1. График КГТЭ №1 для системы, описываемой передаточной функцией (14).

$$a_1 \in [3;5],$$
$$a_2 \in [8;34],$$
$$a_3 \in [17;23],$$
$$a_4 \in [0;10].$$

Введя необходимые данные в программное средство, получим график КГТЭ, построенный на интервале [-10;5] с шагом 0.01 (рисунок 2). Система теряет устойчивость на указанном интервале при $a_4 \approx 2{,}55$.

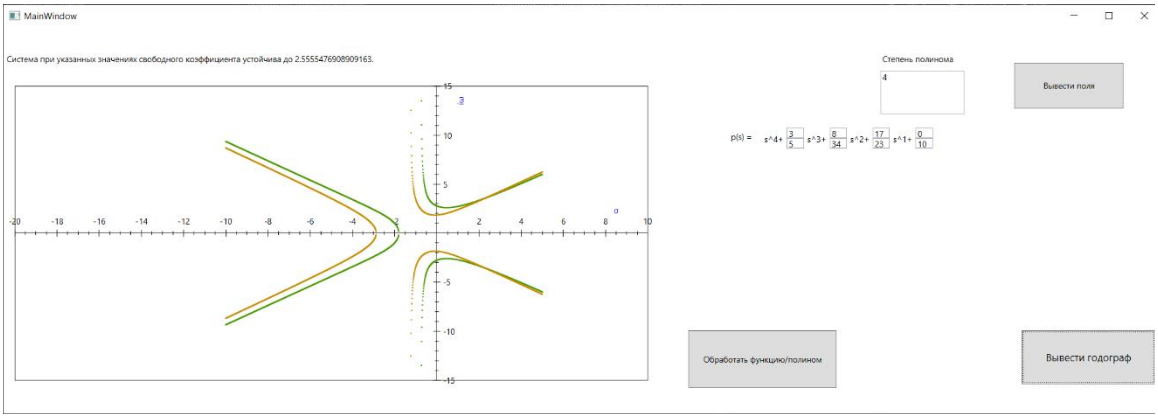

Рис. 2. График КГТЭ №2 для системы, описываемой характеристическим полиномом (15).

Пример 3. Интервальная динамическая система, описываемая характеристическим полиномом вида

$$p(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3, \tag{16}$$

$$a_1 \in [5;6],$$
$$a_2 \in [7;10],$$
$$a_3 \in [0;8].$$

Введя необходимые данные в программное средство, получим график КГТЭ, построенный на интервале [-10;5] с шагом 0.01, и вывод о сохранении устойчивости системы на заданном интервале при изменении свободного коэффициента (рисунок 3).

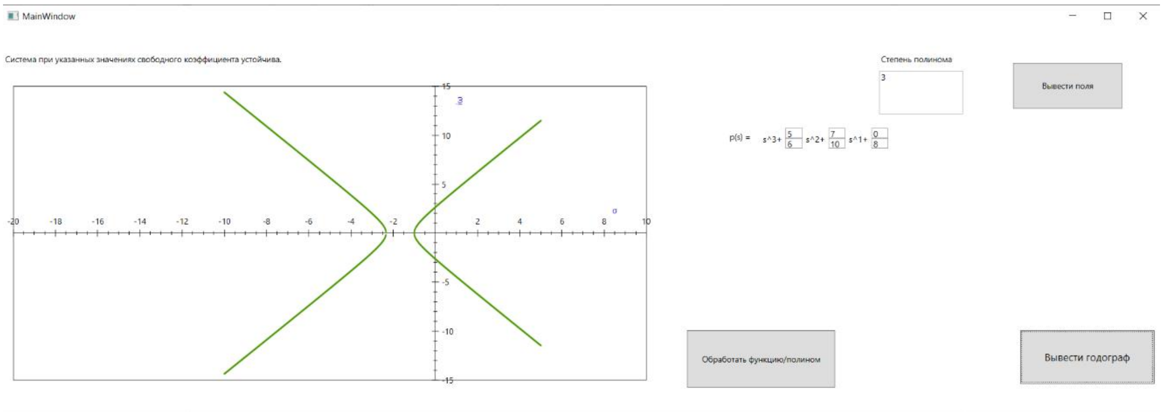

Рис. 3. График КГТЭ №3 для системы, описываемой характеристическим полиномом (16).

В ходе выполнения работы создано программное средство для анализа устойчивости и параметрического синтеза интервальных САУ. Оно позволяет работать как с классическими, так и с интервальными динамическими системами при условии корректной формы вводимых данных. Приведены примеры функционирования разработанной программы, позволяющие сделать вывод о её работоспособности.

Литература

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. –М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

2. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. – Мн.: ОИПИ НАНБ, 2005.

3. Харитонов, В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений / В.Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. XIV. – № 11. – С. 2086 – 2088.

4. Anderson, B.D.O. On robust Hurwitz polynomials / B.D.O. Anderson, E.I. Jury, M. Mansour // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1987. – Vol. AC-32. – No. 10.