

НАПРАСНИКОВ В.В., БОРОДУЛЯ А.В., ПОЛОЗКОВ Ю.В., КУНКЕВИЧ Д.П., ЖУЙ ВАН ЦЗЫ

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЯЧЕЙСТЫХ ОБЪЕКТОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Республика Беларусь

Описывается используемый метод расчета собственных частот и форм колебаний. Представлены фрагменты кода для построения для некоторых типов заполнителя. Приводятся полученные частоты и формы собственных колебаний для трех видов ячеек.

Ключевые слова: ячейстые объекты, распределение энергии при собственных колебаниях

Введение

Одной из важнейших задач проектирования современных конструкций является снижение их материалоемкости [1-7]. Избыточный вес конструкции приводит, например для летательных аппаратов, к существенному завышению расхода топлива (заряда батарей при использовании электрической тяги), а значит снижает такие важные эксплуатационные характеристики как дальность полета и маневренность.

С другой стороны, конструкция летательного аппарата должна обладать необходимой жесткостью и прочностью, обеспечивающими целостность его конструкции.

Расчет собственных частот и форм колебаний, или модальный анализ, предназначен для предварительной оценки динамического поведения механической системы при переменных нагрузках. В ходе модального анализа можно определить собственные частоты и формы колебаний системы, а также некоторые другие параметры, характеризующие динамические свойства конструкции.

Материалы, представленные в статье, описывают варианты решения подобных задач на основе конечно-элементных моделей для трех вариантов заполнителя одной из конструкций.

Методика анализа собственных форм колебаний

Уравнение динамического равновесия (1) с начальными условиями (2) в конечно-элементной формулировке выглядит следующим образом:

$$M\ddot{\vec{U}} + C\dot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{P}(t), \quad (1)$$

$$\vec{U}(t_0) = \vec{U}_0, \dot{\vec{U}}(t_0) = \dot{\vec{U}}_0. \quad (2)$$

Колебания называются собственными, если происходят при отсутствии внешней нагрузки. Если при этом затухание в системе отсутствует ($C=0$),

то эти колебания продолжаются бесконечно долго. Уравнения (1) принимают вид (3):

$$M\ddot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{0}. \quad (3)$$

Конечно, в действительности такая ситуация невозможна, однако теоретическое ее рассмотрение позволяет выявить некоторые особенные характеристики конструкции, несущие в себе скрытую информацию об этой конструкции, использование которой позволяет значительно упростить решение многих задач.

Будем искать решение системы (3) в виде $\vec{U} = \hat{\vec{U}} \sin(\omega t)$, где $\hat{\vec{U}}$ – неизменный во времени вектор.

Так как $\ddot{\vec{U}} = \hat{\vec{U}}(-\omega^2 \sin(\omega t))$ подставим в (3), получим $(K - \omega^2 M)\hat{\vec{U}} \sin(\omega t) = \vec{0}$.

Поскольку $\sin(\omega t) \neq 0$, не равен нулю тождественно, значит $(K - \omega^2 M)\hat{\vec{U}} = \vec{0}$.

Для того, чтобы существовало нетривиальное решение этой однородной системы линейных алгебраических уравнений, необходимо, чтобы:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0, \quad (4)$$

уравнение (4) называют частотным уравнением.

Можно показать, что для вещественных положительно определенных матриц (какими и являются K и M) уравнение (4) имеет n различных положительных корней: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, а числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ будут называться собственными частотами исходной конструкции. Упорядоченные по возрастанию $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$, они образуют вектор собственных частот $\vec{\omega}^T = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n)$.

Внешние силовые факторы и нелинейности в ходе модального анализа не учитываем.

После того, как из частотного уравнения (4) определены соответствующие частоты:

$$\vec{\omega}^T = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n), \quad (5)$$

$$\text{уравнения } (K - \omega^2 M) \cdot \hat{\vec{U}} = \vec{0} \quad (6)$$

$$\text{выглядят так: где } \hat{E}^{(n)} \cdot \hat{\vec{U}}_n = \vec{0}, \quad (7)$$

Г

$$\text{где } \tilde{E}^{(n)} = K - \omega_n^2 M. \quad (8)$$

То есть каждое из (7) получается последовательной подстановкой в (6) очередной собственной частоты.

Как видно, матрица $\tilde{E}^{(n)}$ своя для каждого ω_n и для нее (6) удовлетворяются тождественно, то есть существует бесконечное множество векторов \hat{U}_n , являющихся решением (6). Это означает, что амплитуды собственных колебаний получить невозможно. Однако форму колебаний получить можно. Для этого достаточно зафиксировать равной какому-то числу одну из компонент вектора \hat{U}_n , а остальные компоненты получатся из решения системы (7) вычисленными по отношению к фиксированной.

Выберем, например, первую компоненту \hat{U}_n равной 1:

$$\hat{U}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь N – общее количество степеней свободы; n – номер собственной частоты, для которой будем определять собственный вектор.

Тогда система (7) переписывается в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{13}^{(n)} & \dots & e_{1N}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & \dots & e_{2N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1}^{(n)} & e_{N2}^{(n)} & e_{N3}^{(n)} & \dots & e_{NN}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Обозначим

$$\tilde{E}_{10}^{(n)} = \begin{pmatrix} e_{21}^{(n)} \\ \dots \\ e_{N1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{E}_{10}^{(n)} = (e_{12}^{(n)} \quad e_{13}^{(n)} \quad \dots \quad e_{1N}^{(n)}),$$

$$\tilde{E}_{00}^{(n)} = \begin{pmatrix} e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & \dots & e_{2N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N2}^{(n)} & e_{N3}^{(n)} & \dots & e_{NN}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_{0n} = \begin{pmatrix} \hat{U}_{2n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{pmatrix} e_{11}^{(n)} & \tilde{E}_{10}^{(n)} \\ \tilde{E}_{01}^{(n)} & \tilde{E}_{00}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$e_{11}^{(n)} + \tilde{E}_{10}^{(n)} \cdot \hat{U}_{0n} = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{E}_{01}^{(n)} + \tilde{E}_{00}^{(n)} \cdot \hat{U}_{0n} = 0. \quad (13)$$

Матрица $\tilde{E}_{00}^{(n)}$ имеет определитель отличный от нуля, тогда систему (10) можно разрешить относительно \hat{U}_{0n}

$$\hat{U}_{0n} = -(\tilde{E}_{00}^{(n)})^{-1} \cdot e_{11}^{(n)}. \quad (14)$$

Условие (12) является хорошим контролем точности проведенных вычислений.

Амплитуды перемещений полученные из (14), вместе с единичной первой компонентой образуют собственный вектор, соответствующий n -той собственной частоте.

Для удобства собственные векторы представляются в безразмерной форме. Для этого выбирается обычно максимальная из компонент u_j -вектора и на нее делятся все компоненты собственного вектора

$$\bar{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \dots \\ \varphi_{Nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_j} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \hat{U}_{3n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь $u_j = \max|1, \hat{U}_{2n}, \dots, \hat{U}_{Nn}|$, $\bar{\varphi}_n$ – вектор формы колебаний по n -ому тону колебаний.

Аналогично вычисляются и другие собственные формы.

Матрица, составленная из собственных форм колебаний, представляет собой матрицу собственных форм колебаний.

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_N) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \dots & \varphi_{NN} \end{pmatrix}.$$

Второй индекс указывает на номер собственной частоты, а первый – на компоненту в векторе.

Заметим, что вычисленные частоты и формы используются и при решении задачи динамики методом разложения по собственным формам колебания. В этом методе на основе определения собственных частот и собственных форм колебаний вводятся новые координаты взамен геометрических, для которых уравнения (1) преобразуются так, что система становится несвязанной, то есть каждое уравнение такой несвязанной (расщепляющейся) системы можно будет решать отдельно от остальных.

Пример построения модели одной из конструкций с ячеистым заполнителем на встроенном языке в среде ANSYS

Исходный объект представляет кольцо над границами которого имеются две стенки заданной высоты. Верхние границы стенок подвержены сжимающим нагрузкам.

На рисунке 1 приведена часть кода для создания геометрической составляющей модели.

```

/PREP7
Setka_kol=10 !Кол-во линий сетки
R=2
Teta=12 !Угол сектора в градусах
R=2
Rb=10
Ri=6
Dlina=10
del=Dlina/10
delR=5*R/10
delR_FINISH=(Dlina+5*R)/20
nSEC=1
Pi=3.141592      !Число секций
al=Pi/10
! Определяем постоянные параметры для:
LENGTH = 100.0 ! длины стороны квадрата
THICKNESS = 0.1*R      ! толщины пластины
! значения длины вектора сосредоточенной силы
FORCE = 100.0
DENSITY = 8.0e-6 ! плотности материала
Num=2000
! Определяем постоянные параметры для:
LENGTH = 100.0 ! длины стороны квадрата
YOUNG = 210000.0 ! модуля Юнга материала
THICKNESS = 0.1*R ! толщины пластины
! значения длины вектора сосредоточенной силы
FORCE = 100.0
DENSITY = 8.0e-6 ! плотности материала

!*****
! Задаем толщину равную h2 для стенок OUT
h2=THICKNESS
! Задаем толщину равную h3 для стенок IN
h3=THICKNESS/5
/PREP7
Xc=0 $ Yc=0 $ Zc=0 !Центр окружности
K, 1, Xc, Yc, Zc
!переходим в цилиндрическую СК
CSYS,1
Setka_alfa=10 $ Setka_RAD=5
RAD=(RB-Ri)/Setka_RAD $ alfa=360/Setka_alfa
K_Mashtab_RB=1.2 $ K_Mashtab_Ri=0.8
! Переменной KMax присвоить max номер точки
*GET, KMax, Kp, , NUM, MAX
*DO, j, 1, Setka_alfa !Цикл по радиусам
NUMCMP, ALL
Ax=0 $ Ay=0 $ Bx=RB*K_Mashtab_RB $ By=alfa*(j-1)
Xbeg=Ax $ Ybeg=Ay $ Zbeg=0
K, KMax+2*j-1, Xbeg, Ybeg, Zbeg
Xend=Bx $ Yend=By $ Zend=0
K, KMax+2*j, Xend, Yend, Zend
L, KMax+2*j-1, KMax+2*j
*ENDDO
*DO, j, 1, Setka_RAD !Цикл по окружностям
Ax=Ri*K_Mashtab_Ri+RAD*(j-1)
circle, 1, Ax
*ENDDO

```

Рисунок 1. Часть кода для создания геометрической составляющей модели

Результаты моделирования для трех вариантов ячеек

Пример такого изделия с радиальными ячейками представлен на рисунке 2.

Результат расчета собственных форм представлен на рисунке 3.

Пример изделия с наполнителем в виде шестиугольных сот представлен на рисунке 4.

Результат расчета собственных форм представлен на рисунке 5.

Пример изделия с наполнителем в виде квадратных ячеек представлен на рисунке 6.

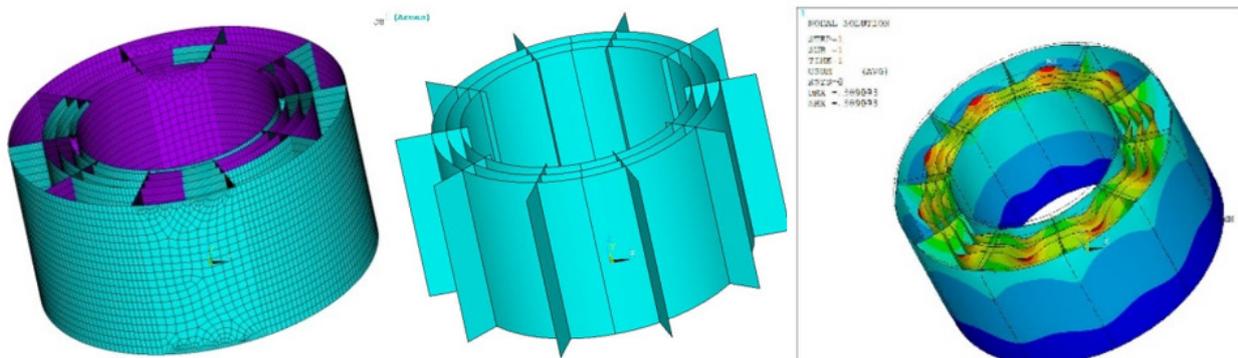


Рисунок 2. Слева конечно-элементная сетка на всем изделии, в центре -ячейки, справа – деформированное состояние при статическом нагружении

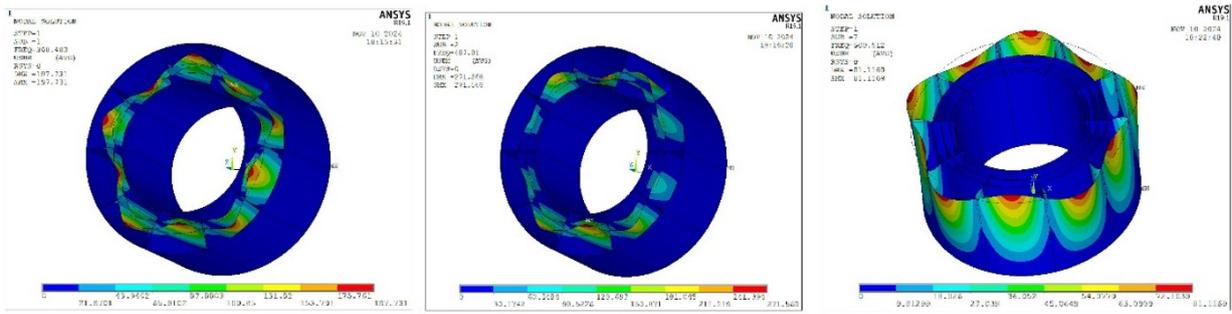


Рисунок 3. Собственные формы колебаний. Слева- форма с частотой 360,4 Гц, в центре - форма с частотой 407,0 Гц, справа – форма с частотой 500,5 Гц

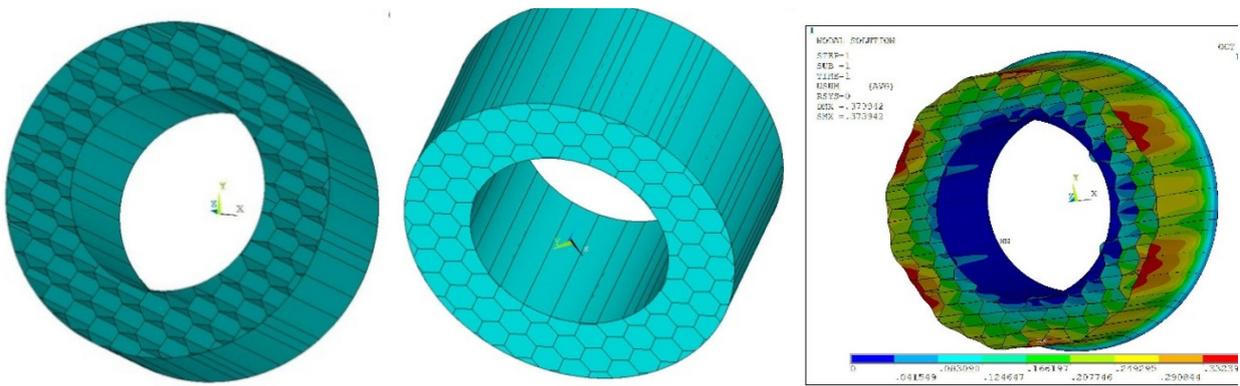


Рисунок 4. Изделие с наполнителем в виде шестиугольных сот (слева и в центре). Справа – деформированное состояние при статическом нагружении

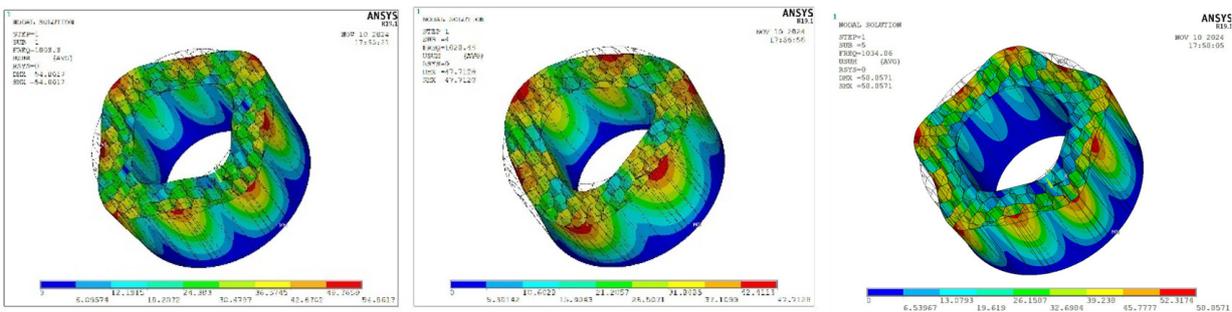


Рисунок 5. Собственные формы колебаний. Слева- форма с частотой 1009,9 Гц, в центре - форма с частотой 1020,4 Гц, справа – форма с частотой 1034,0 Гц

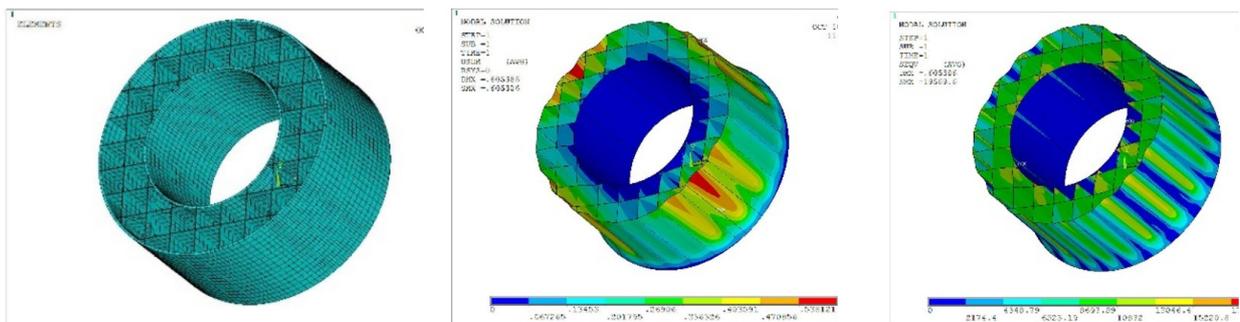


Рисунок 6. Слева конечно-элементная сетка на объекте, в центре – картина деформаций, справа – напряжения по Мизесу

Результат расчета собственных форм представлен на рисунке 7.

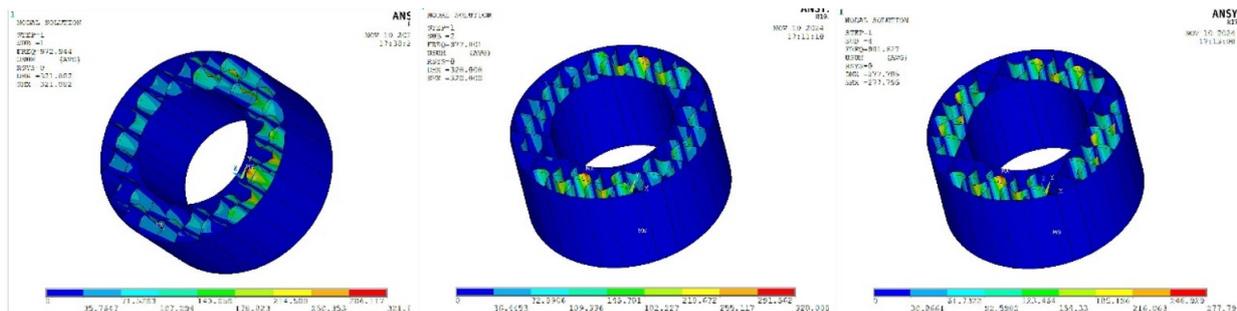


Рисунок 7. Собственные формы колебаний. Слева - форма с частотой 974,5 Гц, в центре - форма с частотой 977,0 Гц, справа – форма с частотой 981,6 Гц

Заключение

При реализации данного проекта установлено, что:

- при использовании различного вида заполнителей собственные частоты колебаний конструкции существенно отличаются. Для изделия с радиально-концентрическим заполнителем первая частота равна 360,4 Гц, для заполнителя в виде шестиугольных сот первая частота равна 1009,9 Гц, а для квадратных сот первая частота равна 974,5 Гц ;

- для изделия с радиально-концентрическим заполнителем на форме с частотой 360,4 Гц, и форме с частотой 407,0 Гц максимальные амплитуды возникают на цилиндрических частях заполнителя, а на форме с частотой 500,5 Гц – на внешней оболочке конструкции;

- на изделии с заполнителем в виде квадратных сот максимальные амплитуды возникают на внутренних пластинах заполнителя для всех рассмотренных собственных частот 974,5 Гц, 977,0 Гц и 981,6 Гц;

- на изделии с заполнителем в виде шестиугольных сот максимальные амплитуды возникают только на внешней оболочке конструкции для всех рассмотренных собственных частот 1009,9 Гц, 1020,4 Гц и 1034,0 Гц;

- таким образом распределение энергии при собственных колебаниях по различным частотам существенно зависит от вида заполнителя и должно учитываться при проектировании конструкций при наличии соответствующих ограничений в техническом задании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красновская С.В., Напрасников В.В. Исследование возможности идентификации прижимных усилий креплений конструкции с использованием нейронных сетей на основе конечно-элементной модели компрессорно-конденсаторной установки. Журнал "Информатика", 2017, № 4, с. 92-99.
2. Красновская С.В., Напрасников В.В. Обзор возможностей оптимизационных алгоритмов при моделировании конструкций компрессорно-конденсаторных агрегатов методом конечных элементов. Вестні нацыянальнай акадэміі навук беларусі, 2016, № 2, серыя фізіка-тэхнічных навук, с. 92-99.
3. Напрасников В.В., Красновская С.В. Влияние упрощающих предположений в конечно-элементных моделях компрессорно-конденсаторных агрегатов на спектр собственных частот. Журнал "Системный анализ и прикладная математика", 2014, № 1-3, с. 51-55.
4. Бородуля А.В., Кункевич Д.П., Напрасников В.В., Полозков Ю.В. APDL-моделирование ячеистых конструктивных элементов деталей для аддитивного формообразования. Материалы НТК "Аддитивные технологии, материалы и конструкции", Гродно, 5-6 октября, 2016, с. 146-152.
5. Напрасников В.В., Ковалева И.Л., Полозков Ю.В., Кункевич Д.П., Бородуля А.В. Конечно-элементная модель подошвы с использованием ячеистых объектов. «Системный анализ и прикладная информатика». 2023;(2):24-30. DOI: 10.21122/2309-4923-2023-2-24-30
6. Напрасников В.В., Ван Ц., Ковалева И.Л., Новиков С.Н. Сценарии SpaceClaim в создании учебных моделей. «Системный анализ и прикладная информатика». 2023;(3):60-64. DOI: 10.21122/2309-4923-2023-3-60-64
7. Ковалева И.Л., Кункевич Д.П., Напрасников В.В., Полозков Ю.В., Чваньков А.А. Топологическая оптимизация конструктивной геометрии легких деталей. «Системный анализ и прикладная информатика». 2022;(3):50-55. DOI: 10.21122/2309-4923-2022-3-50-55

REFERENCES

1. **Krasnovskaja S.V., Naprasnikov V.V.** Issledovanie vozmozhnosti identifikacii prizhimnyh usilij krepjenij konstrukcii s ispol'zovaniem nejronnyh setej na osnove konechno-jelementnoj modeli kompressorno-kondensatornoj ustanovki. Zhurnal "Informatika", 2017 № 4, s. 92-99.
2. **Krasnovskaja S. V., Naprasnikov V. V.** Obzor vozmozhnostej optimizacionnyh algoritmov pri modelirovanii konstrukcij kompressorno-kondensatornyh agregatov metodom konechnykh jelementov. Vesci nacyjanal'naj akadjemp navuk belarusi, 2016 № 2, seryja fizika-tjehnichnyh navuk, s.92-99.
3. **Naprasnikov V.V., Krasnovskaja S.V.** Vlijanie uproshhajushhh predpolozhenij v konechno-jelementnyh modeljah kompressorno-kondensatornyh agregatov na spektr sobstvennyh chastot. Zhurnal "Sistemnyj analiz i prikladnaja matematika", 2014, № 1-3, s.51-55.
4. **Borodulja A.V., Kunkevich D.P., Naprasnikov V.V., Polozkov Ju.V.** APDL-modelirovanie jacheistykh konstruktivnyh jelementov detalej dlja additivnogo formoobrazovanija. Materialy NTK "Additivnye tehnologii, materialy i konstrukcii", Grodno, 5-6 oktjabrja, 2016, s.146-152.
5. **Naprasnikov V.V., Kovaleva I.L., Polozkov Y.V., Kunkevich D.P., Borodulya A.V.** Finite-element model of a sole with the using of cellular objects. «System analysis and applied information science». 2023;(2):24-30. (In Russ.) DOI: 10.21122/2309-4923-2023-2-24-30
6. **Naprasnikov V.V., Wang Z., Kovaleva I.L., Novikov S.N.** Using SpaceClaim scripts to create training models. «System analysis and applied information science». 2023;(3):60-64. (In Russ.). DOI: 10.21122/2309-4923-2023-3-60-64
7. **Kovaleva I.L., Kunkevich D.P., Naprasnikov V.V., Polozkov Y.V., Chvankov A.A.** Topological optimization of constructive solid geometry of lightweight structures. «System analysis and applied information science». 2022;(3):50-55. (In Russ.). DOI: 10.21122/2309-4923-2022-3-50-55

NAPRASNIKOV V.V., BORODULYA A.V., POLOZKOV J.V., KUNKEVICH D.P., WAN TZU ZHUI

MODAL ANALYSIS OF PLATE-LIKE CELLULAR OBJECTS WITH PERIODIC STRUCTURE

*Belarusian National Technical University
Minsk, Republic of Belarus*

The method used to calculate natural frequencies and vibration shapes is described. Code fragments for construction for some types of filler are presented. The obtained frequencies and shapes of natural vibrations for three types of filler on the example of one construction are given.

Keywords: *cellular objects, energy distribution at natural vibrations*



Напрасников Владимир Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечения информационных систем и технологий» БНТУ. Научные интересы – конечно-элементное моделирование, компьютерные средства инженерного анализа технических систем.

Naprasnikov Vladimir Vladimirovich, PhD, associate Professor of the Software Department of the Belarusian National Technical University. His research interest focus on finit-element computer aided engineering.

E-mail: n_v_v@tut.by



Бородуля Алексей Валентинович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечения информационных систем и технологий» БНТУ. Научные интересы – CALS – технологии.

Borodulya Aleksei, PhD, associate Professor of the Software for Information technologies and systems Department of the Belarusian National Technical University. His research interest focus on CALS-technologies.

E-mail: alexius_@msn.com



Полозков Юрий Владимирович, доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Программное обеспечения информационных систем и технологий» БНТУ. Научные интересы – автоматизация проектирования объектов и процессов аддитивного производства, оцифровка описаний поверхностей объектов, информационные технологии в образовании.

Polozkov Yuriy Vladimirovich, PhD, head of the Department of Software for Information technologies and systems of the Belarusian National Technical University. His research interest focus on computer aided design and engineering of the objects of additive production, surfaces digitization, information technologies in the education.

E-mail: polozkov_yury@mail.ru



Кункевич Дмитрий Петрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных систем и технологий» БНТУ. Научные интересы – автоматизация конструкторско-технологического проектирования и инженерного анализа механических систем.

Kunkevich Dmitry, PhD, associate Professor of the Software Department of the Belarusian National Technical University. His research interest focus on computer aided design and engineering of mechanical systems.

E-mail: kunkevichd@gmail.com



Ван Цзы Жуй, аспирант кафедры «Программное обеспечение информационных систем и технологий» БНТУ. Научные интересы - конечно-элементное моделирование, компьютерные средства инженерного анализа технических систем.

Wang Zirui, postgraduate student of the department "Software for information systems and technologies" at BNTU. Scientific interests - finite element modeling, computer aids for engineering analysis of technical systems.

E-mail: 610958034@qq.com