инструмента и угол γ ее наклона к оси ОХ. Для этого использовались следующие формулы

$$\gamma_{\text{j}} = 90^{\text{o}} - arctg(\frac{y'_{\text{j}}}{x'_{\text{j}}}),$$

$$V_{\text{êðj}} = \omega\sqrt{x'^2_{\text{j}} + y'^2_{\text{j}}}.$$

Результирующая относительная скорость определялась как

$$\overline{V}_{\text{î òí}} = \overline{V}_{\text{êð}} + \overline{V},$$

или в скалярной форме для каждого участка заготовки

$$V_{\text{î òí j}} = \sqrt{V^2_{\text{j}} + V^2_{\text{êðj}} + 2V_{\text{j}}V_{\text{êðj}}\cos(\beta_{\text{j}} + \gamma_{\text{j}})}.$$

При этом основное влияние на полирующий эффект оказывает вертикальная составляющая скорости скольжения, так как топография поверхности на участтке взаимодействия торцевой поверхности режущего инструмента и участком пропила заготовки характеризуется наличием однонаправленных рисок, параллельных оси ОХ (рисунок 1). Сглаживание таких микронеровностей как раз и осуществляется вертикальной составляющей скорости относительного скольжения, вычисляемой для каждого участка сформированной траектории движения как по формуле

$$V_{\text{âåðòj}} = V_{\text{î òí j}}\sin(\beta_{\text{j}} + \gamma_{\text{j}}).$$

На рисунке 3 показано разложение в спектр Фурье данной составляющей в пределах одного цикла циркуляционного движения.

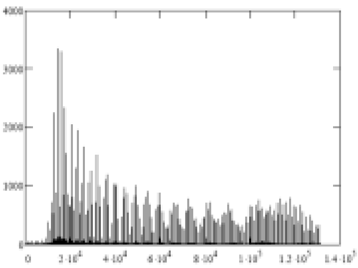

Рисунок 3 – Разложение в спектр Фурье вертикальной составляющей скорости скольжения

Как видно в изменении вертикальной составляющей присутствует широкий спектр частот. Это позволяют судить об эффективном сглаживании микронеровностей в широком диапазоне частот вращения режущего инструмента.

1. Киселев, М.Г. Повышение интенсивности и качества распиливания твердых сверхтвердых материалов путем сообщения заготовке двухмерного циркуляционного движения / М.Г. Киселев, А.В. Дроздов, Д.А. Ямная // Вестник БНТУ. – 2011. – № 5. – С. 36–40.

УДК 530.182

К ПРОБЛЕМЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Вопрос об интегрируемости нелинейных уравнений в частных производных уже многие годы привлекает внимание исследователей [1]. Актуальность данного вопроса обусловлена тем, что нелинейные модели явлений и процессов в самых различных областях приобретают все возрастающее значение. Среди них особо выделяются так называемые существенно нелинейные модели, нелинейные уравнения движения которых допускают решения типа солитонов или солитоноподобных объектов. Использование существенно нелинейных моделей позволяет описать принципиально новые закономерности поведения изучаемых систем. Однако до настоящего времени строгий математический критерий интегрируемости таких уравнений отсутствует.

Нелинейное уравнение в частных производных считается интегрируемым, если для него можно построить не только решение в виде одиночного солитона (или антисолитона), но и решения, произвольного порядка, представляющее собой связанное состояние произвольного числа солитонов и/или антисолитонов. В этом случае для системы, описываемой интегрируемым уравнением, существует бесчисленное множество законов сохранения, соответствующих каждому из решений [2].

В качестве возможного критерия интегрируемости предлагались различные условия: наличие преобразований Бэклунда, критерий Пенлеве, интегрируемость по Хироте, условия симметрии, представление с использованием интегрального уравнения и ряд других. Наиболее распространенным и широко используемым в настоящее время является критерий интегрируемости, согласно которому нелинейное уравнение в частных производных будет интегрируемым, если для него существует пара операторов Лакса. Однако ни один из предложенных критериев не является универсальным, каждый из них имеет ограниченную область применения [3, 4].

Важной особенностью интегрируемых нелинейных уравнений является выполнение условия энергетического баланса между механизмами протекания различных процессов, учитываемых в таких уравнениях. Например, дисперсия всегда приводит к расплыванию волнового пакета. С другой стороны, нелинейные члены, присутствующие в уравнении, обуславливают его сжатие. Реализация в системе каждого из таких механизмов требует некоторых затрат энергии, причем может происходить как поглощение, так и выделение энергии.

Одним из способов установления баланса между различными механизмами является учет в системе процессов диссипации энергии (трение, затухание и другие процессы, при которых происходит рассеяние энергии). С физической точки зрения такой подход вполне правомерен, так как подобные процессы присутствуют практически во всех явлениях, за исключением, пожалуй, сверхтекучести, сверхпроводимости и неразрушающих квантовых измерений. Учет диссипации может проводиться разными способами и оказывается весьма эффективным.

Рассмотрим, например, широко распространенную практически во всех областях физики теорию φ^4. Нелинейное уравнение движения в этой теории имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - m\varphi + \lambda\varphi^3 = 0, \qquad (1)$$

где m и λ – некоторые константы. Это уравнение является неинтегрируемым и для него существует только решение в виде одиночного кинка [5]

$$\varphi(x,t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} tanh\left[\frac{m}{\sqrt{2}}\left(\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)\right], \qquad (2)$$

где v – скорость движения кинка, $|v| \ll 1$, причем считаем, что скорость света $c = 1$; x_0 – начальная фаза. Решение в виде антикинка получается изменением знака для функции $\varphi(x,t)$.

Учет диссипации в уравнении (1) можно произвести, включив в него слагаемое, пропорциональный скорости изменения функции $\varphi(x,t)$. Это позволяет записать уравнение (1) в виде [6]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - m\varphi + \lambda\varphi^3 = 0, \qquad (3)$$

где $\alpha = const > 0$ – коэффициент диссипации. Уравнение (3) является интегрируемым. Для него можно построить не только решение в виде кинка

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2}\left\{1 + tanh\left[\frac{(9+2\alpha^2)^{1/2}}{4\alpha}\left(x - \frac{3t}{(9+2\alpha^2)^{1/2}}\right) + \eta_1^{(0)}\right]\right\}, \qquad (4)$$

где $\eta_1^{(0)}$ –начальная фаза решения, но и любое другое решение, соответствующее связанному состоянию произвольного числа кинков и/или антикинков.

Несмотря на то, что система описываемая уравнением (3), уже не является консервативной, и расчет скорости потерь энергии показывает, что ее величина является конечной со временем, в системе формируется энергетический баланс за счет свойств бесконечной среды.

Другой пример успешного учета диссипативных процессов для построения интегрируемого уравнения дает нелинейная упругопластическая модель, описывающая свойства конструкционных материалов.

В этой модели реализуется процедура усреднения локальной деформации по некоторому объему структурной ячейки материала, при условии, что размеры такой ячейки малы по сравнению с характерным размером задачи. В результате текучесть материала оказывается зависящей не только от приложенного напряжения и деформации, но и от градиента деформации второго порядка [7].

Возмущения $\varepsilon(x,t)$ однородного напряженно-деформированного состояния на стадии разупрочнения описываются уравнением вида [8]

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{d\sigma}{dx}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} - \delta^4\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial x^4}. \qquad (5)$$

Нелинейность уравнения обусловлена членом вида $\frac{d\sigma}{dx}$, что предполагает наличие решений солитонного типа.

Однако даже в простейшем нелинейном (квадратичном) приближении для диаграммы материала $\sigma(x)$ данное уравнение не имеет локализованных решений типа одиночного солитона. Решение, подобное двухсолитонному, удается построить только при условии компенсации мнимых частей его односолитонных составляющих. Фактически, это решение типа бризера. Оно локализовано по пространственной переменной и осциллирует во времени. При построении такого решения требуется вводить ограничения, которые носят скорее математический характер и мало связаны с изучаемой физической моделью.

Для данной модели учет диссипативных процессов уже не удается провести так просто, как это было сделано в уравнении (1). Это можно объяснить сложным химическим составом и структурой материалов, для описания которых она используется.

Для конструкционных материалов характерны как существенная пространственная неоднородность, так и неодинаковые интенсивность и скорость протекания разупрочнения по всему объему материала. Поэтому наряду с общим учетом диссипации энергии со временем, возникает необходимость учета потерь энергии вследствие структурной неоднородности материала.

Следовательно, в уравнение (5) необходимо добавить слагаемое, определяемое скоростью изменения величины $\varepsilon(x,t)$ не только во времени, но также и по пространству, это приведет к появлению в уравнении слагаемого, пропорционального смешанной производной.

В результате уравнение движения для неоднородных возмущений напряженного состояния можно представить в следующем виде вид [9]

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial t}=\frac{d\sigma}{dx}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}-\delta^4\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial x^4}, \qquad (6)$$

где $\alpha = const > 0$ – коэффициент диссипации.

Данное уравнение при использовании квадратичного приближения для диаграммы материала на стадии разупрочнения является интегрируемым. Для него возможно построить любое солитонное решение, включая и односолитонное и решения, описывающие многосолитонные связанные состояния.

1. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. ст. / Под ред. В.Г. Барьяхтара, В.Е. Захарова, В.М. Черноусенко. – Киев: Наукова думка, 1990. – 472 с.
2. Захаров, В.Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков,С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 497 с.
4. Ablowitz, M.J. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering / M.J. Abliwitz,P.A. Clarkson. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991. – 391 p.
5. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1984. – 416 с.
6. Князев, М.А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.
7. Кукуджанов, В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и её применение к исследованию локализации деформаций / В.Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 72-87.
8. Мягков, Н.Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне / Н.Н. Мягков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 3. – С 28-32.
9. Князев, М.А. Солитоны в нелинейной упруго-пластической модели / М.А. Князев. – Минск: БНТУ, 2013. – 221 с.

УДК 530.182

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ОДИНОЧНЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ КАНА-ХИЛЛИАРДА

Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Модель Кана-Хиллиарда в последние годы приобретает все большую популярность. Она находит широкое применение для описания микроструктуры смесей полимеров [1], поверхностей кристаллов [2], систем с разделяющимися фазами во внешних полях [3], пространственно-временной хаотической динамики [4] и т.д. Особенностью данной модели является то, что в ней параметр порядка сохраняется глобально, в целом. Однако возможна такая ее модификация, в которой параметр порядка сохраняется только локально. В настоящей работе рассмотрена такая модифицированная модель Кана-Хиллиарда и описана попытка построения решения соответствующего уравнения движения при помощи одиночных «замороженных» (frozen) волн, т.е. волн, периодических по пространственной переменной и независящих от времени.

В (1+1)-мерном случае уравнение движения модифицированной модели можно записать в виде [5]

$$\phi_t+(\phi-\phi^3+\phi_{xx})_{xx}+\alpha\phi=0, \qquad (1)$$

где ϕ – параметр порядка; коэффициент α определяет отношение характерного размера областии, внутри которой сохраняется параметр порядка, к характерной толщине l полимера, образованного двумя цепями мономеров. Для производных использованы обозначения $\phi_t = \partial\phi/\partial t$, $\phi_{xx} = \partial^2\phi/\partial x^2$ и т.п. Решения в виде замороженных волн возникают при $0 \le \alpha \le 1/4$ [6]. Уравнение (1) для таких волн принимает вид

$$k^2(\bar\phi-\bar\phi^3+\bar\phi_{\xi\xi})_{\xi\xi}+\alpha\bar\phi=0, \qquad (2)$$

где использована замена переменной $\xi = kx$ и $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Граничное условие имеет вид $\bar\phi\,(x+2\pi)=\bar\phi\,(x)$. Замороженные волны имеют место в случае слабой нелинейности, что позволяет в линейном приближении искать их в виде $\bar\phi\; = \varepsilon\cos(kx+p)$, причем амплитуда ε – малая величина; здесь p - фаза. Для нелинейного уравнения (2) решение можно представить в виде разложения в ряд по теории возмущений: