Следовательно, в уравнение (5) необходимо добавить слагаемое, определяемое скоростью изменения величины $\varepsilon(x,t)$ не только во времени, но также и по пространству, это приведет к появлению в уравнении слагаемого, пропорционального смешанной производной.

В результате уравнение движения для неоднородных возмущений напряженного состояния можно представить в следующем виде вид [9]

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial t} = \frac{d\sigma}{dx}\cdot\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} - \delta^4\frac{\partial^4\varepsilon}{\partial x^4}, \quad (6)$$

где $\alpha = const > 0$ – коэффициент диссипации.

Данное уравнение при использовании квадратичного приближения для диаграммы материала на стадии разупрочнения является интегрируемым. Для него возможно построить любое солитонное решение, включая и односолитонное и решения, описывающие многосолитонные связанные состояния.

1. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. ст. / Под ред. В.Г. Барьяхтара, В.Е. Захарова, В.М. Черноусенко. – Киев: Наукова думка, 1990. – 472 с.
2. Захаров, В.Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков,С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 497 с.
4. Ablowitz, M.J. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering / M.J. Abliwitz,P.A. Clarkson. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991. – 391 p.
5. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1984. – 416 с.
6. Князев, М.А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.
7. Кукуджанов, В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и её применение к исследованию локализации деформаций / В.Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 72-87.
8. Мягков, Н.Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне / Н.Н. Мягков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 3. – С 28-32.
9. Князев, М.А. Солитоны в нелинейной упругопластической модели / М.А. Князев. – Минск: БНТУ, 2013. – 221 с.

УДК 530.182

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ОДИНОЧНЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ КАНА-ХИЛЛИАРДА

Князев М.А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Модель Кана-Хиллиарда в последние годы приобретает все большую популярность. Она находит широкое применение для описания микроструктуры смесей полимеров [1], поверхностей кристаллов [2], систем с разделяющимися фазами во внешних полях [3], пространственно-временной хаотической динамики [4] и т.д. Особенностью данной модели является то, что в ней параметр порядка сохраняется глобально, в целом. Однако возможна такая ее модификация, в которой параметр порядка сохраняется только локально. В настоящей работе рассмотрена такая модифицированная модель Кана-Хиллиарда и описана попытка построения решения соответствующего уравнения движения при помощи одиночных «замороженных» (frozen) волн, т.е. волн, периодических по пространственной переменной и независящих от времени.

В (1+1)-мерном случае уравнение движения модифицированной модели можно записать в виде [5]

$$\phi_t + (\phi - \phi^3 + \phi_{xx})_{xx} + \alpha\phi = 0, \quad (1)$$

где ϕ – параметр порядка; коэффициент α определяет отношение характерного размера областии, внутри которой сохраняется параметр порядка, к характерной толщине l полимера, образованного двумя цепями мономеров. Для производных использованы обозначения $\phi_t = \partial\phi/\partial t$, $\phi_{xx} = \partial^2\phi/\partial x^2$ и т.п. Решения в виде замороженных волн возникают при $0 \le \alpha \le 1/4$ [6]. Уравнение (1) для таких волн принимает вид

$$k^2\left(\bar{\phi} - \bar{\phi}^3 + \bar{\phi}_{\xi\xi}\right)_{\xi\xi} + \alpha\bar{\phi} = 0, \quad (2)$$

где использована замена переменной $\xi = kx$ и $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Граничное условие имеет вид $\bar{\phi}(x+2\pi) = \bar{\phi}(x)$. Замороженные волны имеют место в случае слабой нелинейности, что позволяет в линейном приближении искать их в виде $\bar{\phi} = \varepsilon\cos(kx+p)$, причем амплитуда ε – малая величина; здесь p - фаза. Для нелинейного уравнения (2) решение можно представить в виде разложения в ряд по теории возмущений:

$$\bar{\phi} = \varepsilon\left(\bar{\phi}^{(0)} + \varepsilon^2\bar{\phi}^{(2)} + \cdots\right), \qquad (3)$$

$$k^2 = K^{(0)} + \varepsilon^2 K^{(2)} + \cdots \qquad (4)$$

Подставив соотношения (3) и (4) в уравнение (2), получим бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений для определения всех функций $\bar{\phi}^i(\xi)$, где $i = 0, 2, 4, \ldots$ Используя требование периодичности решения по пространственной переменной, можно вычислить явно в ведущем порядке по ε и следующем за ним порядке функции $\bar{\phi}^{(0)} = \cos\xi$ и

$$\bar{\phi}^{(2)} = \frac{9K^{(0)}\cos 3\xi}{36K^{(0)}\left(1-9K^{(0)}\right)-4\alpha},$$

а также коэффициенты

$$K^{(0)} = \left(1 \pm \sqrt{1-4\alpha}\right)/2,$$

$$K^{(2)} = 3K^{(0)}/4\left(1-2K^{(0)}\right).$$

Уравнение в ведущем порядке по ε будет однородным, все остальные уравнения системы являются неоднородными. При этом функциональная зависимость правой части уравнения для функции $\bar{\phi}^{(2)}$ будет определяться только функцией $\cos 3\xi$, так как коэффициент при функции $\cos\xi$ принимается равным нулю, что и позволяет найти $K^{(2)}$. Таким образом, по крайней мере, в ведущем и следующем за ним порядках по ε удается разделить гармонические составляющие решения.

Однако эффективность используемой схемы построения решения $\bar{\phi}$ в виде одиночных волн, основанного на использовании теории возмущений, на этом исчерпывается. Для следующей в ряду (3) функции $\bar{\phi}^{(4)}$ получаем уравнение вида

$$K^{(0)2}\bar{\phi}^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi} + K^{(0)}\bar{\phi}^{(4)}_{\xi\xi} + \alpha\bar{\phi}^{(4)} =$$

$$= \left[6K^{(2)}\bar{\phi}^{(0)}\bar{\phi}^{(0)2}_{\xi} - K^{(4)}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi\xi} + 3K^{(2)}\bar{\phi}^{(0)2}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi\xi} -\right.$$

$$\left.-K^{(2)2}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi\xi\xi\xi} - 2K^{(0)}K^{(4)}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi\xi\xi\xi}\right] - \left[K^{(2)}\bar{\phi}^{(2)}_{\xi\xi} +\right.$$

$$\left.+2K^{(0)}K^{(2)}\bar{\phi}^{(2)}_{\xi\xi\xi\xi}\right] + \left[12K^{(0)}\bar{\phi}^{(0)}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi}\bar{\phi}^{(2)}_{\xi} +\right.$$

$$+6K^{(0)}\bar{\phi}^{(2)}\bar{\phi}^{(0)2}_{\xi} + 3K^{(0)}\bar{\phi}^{(0)2}\bar{\phi}^{(2)}_{\xi\xi} +$$

$$\left.+ 6K^{(0)}\bar{\phi}^{(2)}\bar{\phi}^{(0)}_{\xi\xi}\bar{\phi}^{(0)}\right]. \qquad (5)$$

Если подставить в уравнение (5) явные выражения для $\bar{\phi}^{(0)}$, $\bar{\phi}^{(2)}$, $K^{(0)}$ и $K^{(2)}$, полученные в работе [5] и приведенные выше, то данное уравнение может быть записано в следующем виде

$$K^{(0)2}\bar{\phi}^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi} + K^{(0)}\bar{\phi}^{(4)}_{\xi\xi} + \alpha\bar{\phi}^{(4)} =$$

$$= A\cos\xi + B\cos 3\xi + C\cos 5\xi, \qquad (6)$$

где A, B и C – некоторые коэффициенты, которые выражаются через $K^{(0)}$, $K^{(2)}$, $K^{(4)}$ и α. Явные представления для этих коэффициентов здесь не приводятся в виду их громоздкости.

Вследствие требования периодичности решения, коэффициент A можно положить равным нулю. Это позволяет сразу определить коэффициент $K^{(4)}$. Данный коэффициент равен

$$K^{(4)} = \frac{9K^{(0)}\left(1-3K^{(0)}\right)}{16\left(1-2K^{(0)}\right)^3} +$$

$$+ \frac{15K^{(0)2}}{\left[36K^{(0)}\left(1-9K^{(0)}\right)-4\alpha\right]\left(1-2K^{(0)}\right)}.$$

Для того, чтобы и в рассматриваемом в данном случае порядке по малому параметру ε произошло разделение гармонических составляющих решения, необходимо, чтобы при полученных выражениях для $K^{(0)}$, $K^{(2)}$, $K^{(4)}$ и при заданном значении α коэффициент B в уравнении (6) автоматически обращался в нуль. Этого, однако, не происходит. В результате получается, что правая часть уравнения для функции $\bar{\phi}^{(4)}$ будет определяться сразу двумя гармоническими составляющими, а именно, $\cos 3\xi$ и $\cos 5\xi$, т.е. как минимум двумя волнами. Это, в свою очередь, означает, что и решение уравнения (6) будет определяться вкладами от двух различных волн.

Таким образом, возникает ситуация в которой не удается соотнести ту или иную гармоническую составляющую только с одним порядком разложения по теории возмущений. Следовательно, подход к решению уравнения (2), основанный на теории возмущений и использующий представление решения в виде суперпозиции только одиночных волн, оказывается неудовлетворительным; его применение не позволяет построить решение.

Данный вывод согласуется с аналогичным выводом, полученным в [5]. В этой работе вычислены только функции $\bar{\phi}^{(0)}$ и $\bar{\phi}^{(2)}$. Показано, что, если подставить выражение для $K^{(0)}$ в выражение для $\bar{\phi}^{(2)}$, то последняя функция оказывается неограниченной при $\alpha = 9/100$, хотя, как показано в [6], при таком значении α решение в виде замороженных волн должно существовать.

Еще одним подтверждением того, что разложение по одиночным волнам не применимо, является поведение функции $\bar{\phi}\,(\xi)$ в окрестности точки, в которой производная от функции, описывающей поведение границы области существования решения, меняет знак $(\alpha \to 1/4)$. В этой точке нарушается разложение для коэффицента k^2, определяемое соотношением (4).

Однако, наряду с возможностью построения решения в виде суперпозиции двухволновых составляющих, остается вопрос об устойчивости таких решений [5].

Известно, что для решений в виде одиночных волн, по крайней мере, с точностью до членов, определяемых функциями $\bar{\phi}^{(0)}$ и $\bar{\phi}^{(2)}$, можно найти область значений $\{\alpha, \lambda\}$, в которой они устойчивы. Здесь λ – длина «замороженной» волны; фактически, это период пространственной структуры решения. В тоже время решения двухволнового типа не устойчивы.

Описанную противоречивую ситуацию можно рассматривать как указание на то, что используемый метод построения решений в виде «замороженных» волн, основанный на применении теории возмущений, оказывается не достаточно эффективным, несмотря на то, что в задаче имеется естественный малый параметр ε. В результате линеаризации задачи теряется физическое содержание модели. Для поиска решения необходимо использовать другие методы, применяемые для существенно нелинейных уравнений.

1. Carter, W.G. Variational methods for microstructural-evolution theories / W.G. Carter, J.E. Taylor, J.W. Cahn // JOM-Journal of the minerals, metals & materials society. – 1997. – V. 49, № 12. – P. 30-36.
2. Saito, Y. Anisotropy effect on step morphology described by Kuramoto-Sivashinsky equation / Y. Saito, M. Uwaha // J. Phys. Soc. Japan. – 1996. – V. 65, № 11. – P. 3576-3581.
3. Yeung, C. Phase separation dynamics in driven diffusive systems / C. Yeung, T. Rogers, A. Hernandes- Machado, D. Jasnow // J. Statist. Physics. – 1992. – V. 66, № 3-4. – P. 1071-1088/
4. Golovin, A.A. Convective Cahn-Hilliard models: From coarsening to roughening / A.A. Golovin, A.A. Nepomnyashchy, S.H. Davis, M.A. Zaks // Phys. Rev. Lett. – 2001. – V. 86, № 8. – P. 1550-2001.
5. Benilov, E.S. Stability of frozen waves in the modified Cahn-Hilliard model / E.S. Benilov, W.T. Lee, R.O. Sedakov // Phys. Rev. E – 2013. – V. 87, № 3. – 032138.
6. Liu. F. Dynamics of phase separation in block copolymer melts / F. Liu, N. Goldenfeld // Phys. Rev. A. – 1989. – V. 43, № 9. – P. 4805-4810.

УДК 681.2

СВОЙСТВА ПОКРЫТИЙ НА БАЗЕ TI-N В СОСТАВЕ ПОВЕРХНОСТНО-ЛЕГИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НА СТАЛИ

Ковальчук А.В., Константинов С.В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Повышение срока службы деталей приборов с одновременной минимизацией их массогабаритных параметров является актуальной и перспективной задачей современного приборостроения. В вопросах проектирования и обработки деталей, работающих в условиях трения, значительную роль играют материаловедческие аспекты. Сегодня одним из приоритетных направлений современного материаловедения применительно к вопросам упрочнения деталей приборов, прецизионного инструмента и других является разработка упрочняющих покрытий, защищающих рабочую поверхность от изнашивания, коррозии и механических повреждений. Особое внимание уделяется наноструктурированным многокомпонентным покрытиям ввиду уникального сочетания их свойств. За последнее десятилетие был разработан ряд твердых покрытий на основе металлоподобных тугоплавких химических соединений переходных металлов – нитридов, карбидов, боридов и других. Такие покрытия на стальной поверхности обеспечивают высокую нанотвердость и износостойкость, однако имеют узкую область практического применения, так как их эксплуатационные свойства ограничиваются усилием и нагрузкой, которую может выдерживать покрытие без продавливания. Следовательно, эффективные характеристики системы «конструкционная сталь – PVD покрытие» в большей степени зависят от свойств материала основы.

Композиты типа покрытие-подложка до сих пор слабо описаны теоретически, и важно выявить общие закономерности между микроструктурными особенностями и макроструктурными характеристиками [1, 2]. Следует отметить, что применительно к вакуумным PVD и CVD покрытиям, каждое покрытие обладает своим уникальным набором свойств для каждого конкретного сочетания с подложкой [3, 4]. Такие данные представляют значительный интерес.

Цель работы заключалась в установлении влияния предварительной упрочняющей химико-термической обработки на дюрометрические и трибологические свойства слоистых систем «сталь – PVD покрытие на основе TiN».

В ходе работы были исследованы микро- и нанотвердость PVD покрытий на основе TiN ле-