УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОГО СОДЕРЖАНИЯ

***Ковалёнок Константин Леонидович**, студент 2-го курса*
кафедры «Робототехнические системы»
***Трайго Ксения Юрьевна**, студентка 2-го курса*
кафедры «Робототехнические системы»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Лебедева Г.И., канд. техн. наук, доцент)

Интегралы играют немаловажную роль в решении различных задач, связанных с реальными физическими процессами и инженерными проблемами. Они позволяют описывать и вычислять такие параметры, как объемы, массы, площади поверхностей и многое другое, особенно в сложных геометрических формах и при переменных параметрах, таких как плотность, температура или давление.

Одним из примеров прикладного использования интегралов является вычисление массы сложных конструкций, например, крыши здания в виде купола. В таких случаях плотность материала может изменяться в зависимости от высоты или другого параметра, что делает задачу более сложной и требующей интегрирования для точного определения массы.

В конкретной задаче по вычислению массы бетонного купола, форма которого описывается полусферой, использовался тройной интеграл для учета как изменяющегося радиуса, так и плотности, которая зависела от высоты купола. Этот пример иллюстрирует важность интегралов для получения точных значений в реальных строительных задачах, где упрощения могут привести к ошибкам в расчетах нагрузки на конструкции и их устойчивости.

Задача.

Найти массу купольный крыши из бетона (рис. 1), которая имеет форму полусферы радиусом 15 метров и толщиной 0,5 метра, если плотность бетона изменяется в зависимости от высоты по закону $\rho(h) = 2400 + 6h$ кг/м^3, где h - высота над основанием купола, измеряемая в метрах.

Рисунок 1 – Бетонный купол

Решение:

Исходя из условия задачи, что форма купольной крыши – это полусфера, можно использовать тройной интеграл в сферических координатах.

Т.к. полусфера имеет слой бетона, то необходимо понимать, что внутренний радиус $r_{\text{внутр}} = 14{,}5$ м, а внешний – $r_{\text{внеш}} = 15$ м.

Плотность бетона будет зависеть от высоты h и в сферических координатах будет выражаться как $h = r\cos\varphi$, где φ – полярный угол.

Тогда плотность $\rho(r;\varphi) = 2400 + 6r\cos\varphi$.

Объём элемента в сферических координатах выражается как $dV = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$, где θ – азимутальный угол.

Масса конструкции будет равна $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{14,5}^{15}\rho(r;\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$.

Подставив выражение, по которому измеряется плотность, получим: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{14,5}^{15}(2400 + 6r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$.

Произведем расчет внутреннего интеграла:

$$\int_{14,5}^{15}(2400 + 6r\cos\varphi)\cdot r^2 dr = \int_{14,5}^{15} 2400r^2\, dr + \int_{14,5}^{15} 6r^3\cos\varphi\ dr =$$

$$= 2400\cdot\left(\frac{15^3}{3} - \frac{14{,}5^3}{3}\right) + 6\cos\varphi\cdot\left(\frac{15^4}{4} - \frac{14{,}5^4}{4}\right) \approx 261100 + 7465{,}59\cos\varphi.$$

Затем выполняем интегрирование по φ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (261100 + 7465{,}59 \cos\varphi) \sin\varphi \;\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 261100 \sin\varphi \;\, d\varphi +$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7465{,}59 \cos\varphi \sin\varphi \;\, d\varphi = 261100 \cdot 1 + \frac{7465{,}59}{2} = 261100 + 3732{,}8.$$

И окончательно проинтерпретируем по θ: $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Значит полная масса купольной конструкции равна:

$2\pi(261100 + 3732{,}8) \approx [\text{если } \pi = 3{,}14] \approx 1.663.150$ кг $= 1{,}66 \cdot 10^6$ кг.

Ответ: $1.663.150 = 1{,}66 \cdot 10^6$ кг.